Christian Fleischhack Universität Paderborn

# Analysis II

## Übungsblatt 6

*Die Lösungsblätter sind bis*

**Dienstag, 25. Mai 2010, 11:00 Uhr**

*in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer*
*Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.*

**Aufgabe 23** ***(6 Punkte)***

Bestimmen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \, .$$

**Aufgabe 24** ***(7 Punkte)***

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{x^6 - 1} \, .$$

**Aufgabe 25** ***(5 Punkte)***

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral von

$$\frac{x}{(x^2+1)^n}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 26** ***(6 Punkte)***

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{1}{1+x^{2n}} \, .$$

**Aufgabe 27** ***(6 Punkte)***

Beweisen Sie, daß mit jeder Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ eines Polynoms mit reellen Koeffizienten auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle dieses Polynoms mit gleicher Vielfachheit ist.
Gilt auch die Umkehrung, d. h., hat ein Polynom über $\mathbb{C}$ ausschließlich reelle Koeffizienten, sofern die Menge seiner Nullstellen (mit Vielfachheiten gerechnet) invariant gegenüber komplexer Konjugation ist?

**Aufgabe 28** ***(18 Zusatzpunkte)***

Verallgemeinern Sie die Definition des Integrals auf beschränkte Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow X$, wobei $X$ ein Banachraum ist.

Genauer:

Sei $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ wie im reellen Falle (vgl. Aufgabe 22) genau dann eine Menge von Zwischenpunkten zur Zerlegung $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_k\}$, wenn $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt. Die Feinheit $l(\mathcal{Z})$ einer Zerlegung sei wieder definiert durch $l(\mathcal{Z}) := \max_i\{x_i - x_{i-1}\}$ und die Zwischensumme $Z$ zu $\mathcal{Z}$ und $\Xi$ gegeben durch

$$Z \quad := \quad \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,[x_i - x_{i-1}]\,.$$

Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow X$ wird nun genau dann als riemannintegrierbar bezeichnet, wenn für alle Folgen $(\mathcal{Z}_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} l(\mathcal{Z}_n) = 0$ und alle Folgen $(\Xi_n)$ von Zwischenpunkten zu $(\mathcal{Z}_n)$ die Folge der Zwischensummen $(Z_n)$ gegen denselben Wert konvergiert. Dieser eindeutig bestimmte Wert wird dann als $\int_a^b f$ bezeichnet.

Zeigen Sie:

1. Das Integral ist linear, d. h., es gilt
$$\int_a^b (\lambda f + \varkappa g) \quad = \quad \lambda \int_a^b f + \varkappa \int_a^b g$$
für alle riemannintegrierbaren $f, g : [a, b] \longrightarrow X$ und $\lambda, \varkappa \in \mathbb{K}$.
2. Das Integral ist stetig, d. h., es gilt
$$\Big|\Big| \int_a^b f \Big|\Big| \quad \leq \quad (b - a) \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$$
für alle riemannintegrierbaren $f : [a, b] \longrightarrow X$.
3. Das Integral ist intervaladditiv, d. h., es gilt
$$\int_a^b f \quad = \quad \int_a^c f + \int_c^b f$$
für alle $a \leq c \leq b$.
4. Jedes stetige $f : [a, b] \longrightarrow X$ ist riemannintegrierbar.