Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 11

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 22. Juni 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 46 *(7 Punkte)*

Sei A der Durchschnitt der Vollkugel $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit dem Halbraum $\{(x, y, z) \mid z > \zeta\}$. Hierbei ist $r > 0$ der Radius der Kugel, 0 deren Mittelpunkt und $\zeta \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie das Volumen von A in Abhängigkeit von r und ζ.

Aufgabe 47 *(6 Punkte)*

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende quadrierbare Menge und φ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, daß dann ein $x \in M$ existiert, so daß $|\varphi(M)| = |\det \varphi'(x)|\,|M|$ gilt.

Hinweis: Eine Abbildung $\varphi : M \longrightarrow N$ heißt Diffeomorphismus genau dann, wenn φ bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Aufgabe 48 *(6 Punkte)*

Sei M eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und sei $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
Dann ist der Graph von f, also $\{(x, f(x)) \mid x \in M\}$, eine Jordan-Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 49 *(8 Punkte)*

Sei M eine offene quadrierbare Menge mit Jordanmaß ungleich 0 sowie $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige nichtnegative riemannintegrierbare Funktion. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_M \big(f(x)\big)^n \,\mathrm{d}x} \quad = \quad \sup_{x\in M} f(x)\,.$$

Aufgabe 50 *(8 Zusatzpunkte)*

Finden Sie eine Funktion $f : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$, für die folgendes gilt:
1. f ist nicht über $[0, 1]^2$ riemannintegrierbar;
2. $f(\cdot, y) : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ist für alle $y \in [0, 1]$ riemannintegrierbar;
3. $f(x, \cdot) : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ist für alle $x \in [0, 1]$ riemannintegrierbar.
4. Beide iterierte Integrale existieren und stimmen überein, d. h.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad = \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Hinweis: Finden Sie eine dichte Teilmenge von $[0, 1]^2$, die aber „wirklich nur wenige“ Punkte enthält. Und natürlich: In Aufgabe 42 waren die Negationen gerade andersrum verteilt.