Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 14

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 13. Juli 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 59 *(8 Punkte)*

1. Bestimmen Sie die folgenden Formen, entwickelt in die Standardbasiselemente:

   a) $$\mathrm{d}\big(x^{42}\mathrm{d}x + x^4\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z\big)$$

   b) $$\mathrm{d}\big(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x\big)$$

   c) $$\mathrm{d}\big((\sin x + \cos y)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + xyz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\big)$$

2. Bestimmen Sie für glatte 2-Formen α, β, γ im $\mathbb{R}^n$
$$\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\alpha \wedge \beta \wedge \gamma + \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \gamma + \alpha \wedge \beta \wedge \mathrm{d}\gamma\big)$$

Aufgabe 60 *(8 Punkte)*

Zu je zwei Differentialformen α und β existiert ein reelles c, so daß $\alpha \wedge \beta = c\beta \wedge \alpha$ gilt.
Bestimmen Sie c im Falle, daß

- α eine 2-Form und β eine 2-Form bzw.
- α eine 2-Form und β eine 3-Form bzw.
- α eine 3-Form und β eine 3-Form ist.

Haben Sie eine Vermutung für den allgemeinen Fall?

Hinweis: Die Aussage in der ersten Zeile müssen Sie nicht beweisen.

Aufgabe 61 *(7 Punkte)*

Verallgemeinern Sie die Formeln für grad, rot und div in der Differentialformsprache – soweit es geht – auf den Fall beliebiger Dimension.

Hinweis: Es klappt nur mit zwei der drei Operatoren in natürlicher Weise. – Welchen Grad muß die jeweils betrachtete Differentialform haben?

Aufgabe 62 *(8 Punkte)*

Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung „zu Fuß" für das Variationsproblem
$$\int_a^b (\dot{q} + (t\dot{q})^2)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad \text{stat.}$$
für zweimal stetig differenzierbare $q : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $q(a) = 1$ und $q(b) = 2$ her.

Aufgabe 63 ***(10 Zusatzpunkte)***

Beweisen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad = \quad 0$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ zum Variationsproblem

$$\int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t))\,\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \text{stat.}$$

mit festen $q(a)$ und $q(b)$, falls $L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion ist.