

Analysis I

Übungsblatt 13

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 25. Januar 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer

Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 76

(7 Punkte)

Sei I ein folgenkompaktes Intervall in \mathbb{R} und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Definiere durch

$$m(a) := \min_{x \in I, x \leq a} f(x) \quad \text{bzw.} \quad M(a) := \max_{x \in I, x \leq a} f(x)$$

Funktionen $m, M : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, daß m und M wohldefiniert und stetig sind, falls f stetig ist.
- Bleibt der Schluß gültig, falls „stetig“ jeweils durch „gleichmäßig stetig“ ersetzt wird?

Aufgabe 77

(5 Punkte)

Sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \frac{nx}{1 + |nx|}.$$

Für welche x ist $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ wohldefiniert und in welchen Punkten ist die entsprechende Funktion f stetig? Skizzieren Sie die Funktion f .

Aufgabe 78

(9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

1.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

Hinweis: Abschätzung der Potenzreihe. Oder Testat 4.

2.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Hinweis: Siehe eben.

3.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad \text{für } x \geq 0$$

Hinweis: Testat 4. Oder obere Teilaufgaben.

Aufgabe 79

(5 Punkte)

Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := z^n$ unter Verwendung des Differentialquotienten.