Christian Fleischhack Universität Hamburg

Differentialgeometrie II

Übungsblatt 9

Abgabetermin: Montag, 8. Januar 2007, zur Übung

... und trotz Übungsaufgaben:
Ein besinnliches Weihnachtsfest und ein gesundes, erfolgreiches Neues Jahr!

Aufgabe 21 *(4 Punkte)*

Sei $\pi : P \longrightarrow M$ ein Hauptfaserbündel und $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_\alpha$ eine Familie lokaler Trivialisierungen von P. Sei weiter $\{A_\alpha\}_\alpha$ eine konsistente Familie lokaler Zusammenhangsformen.
Zeigen Sie, daß die durch

$$\omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \quad := \quad (\mathrm{Ad}\,\kappa_\alpha^{-1})\,\pi^* A_\alpha + \kappa_\alpha^* \theta$$

auf den einzelnen $\pi^{-1}(U_\alpha) \subseteq P$ definierte $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form ω eine wohldefinierte Zusammenhangsform auf P ist, für die $s_\alpha^* \omega = A_\alpha$ auf U_α gilt. Hierbei ist, wie üblich, θ die Maurer-Cartan-Form auf G, $\kappa_\alpha := \mathrm{pr}_2 \circ \chi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G \longrightarrow G$ und s_α der zu χ_α gehörige kanonische Schnitt in P über U_α.

Aufgabe 22 *(5 Punkte)*

Geben Sie einen Zusammenhang im quaternionischen Hopfbündel $S^7 \longrightarrow S^4$ an und weisen Sie nach, daß es sich tatsächlich um einen Zusammenhang handelt. Berechnen Sie die Holonomiegruppe des von Ihnen gewählten Zusammenhangs.

Hinweis: Nach dem Satz über die Existenz von Zusammenhängen könnten Sie sich auf die Angabe eines Zusammenhangs über eine Zerlegung der Eins und triviale Zusammenhänge beschränken. Das soll hier ausdrücklich nicht als Lösung zählen. Eine explizite Darstellung ist erwünscht.