Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 1

Abgabetermin: Montag, 27. Oktober 2008, zur Übung

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Sei X ein metrischer Raum und U eine Teilmenge von X. Zeigen Sie:

U ist abgeschlossen genau dann, wenn alle Grenzwerte von Folgen in U wieder in U liegen.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

Sei X ein vollständiger metrischer Raum und Y ein Teilraum von X. Zeigen Sie:

Y ist abgeschlossen genau dann, wenn Y vollständig ist.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Gibt es auf jedem nichttrivialen normierten Raum X eine Metrik, die nicht von irgendeiner Norm auf X induziert ist, aber dieselbe Topologie erzeugt?

Aufgabe 4 *(5 Punkte)*

Sei X ein metrischer Raum und d eine Ultrametrik, d. h. eine Metrik, die zudem

$$d(x,z) \quad \leq \quad \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

für alle $x, y, z \in X$ erfüllt. (Beispiele hierfür sind die diskrete Metrik oder die p-adische Metrik auf $\mathbb{Q}$.) Zeigen Sie:

1. Ist $d(x,y) \neq d(y,z)$, so gilt $d(x,z) = \max\{d(x,y), d(y,z)\}$.
2. Jede Kugel $B_r(x)$ ist offen und abgeschlossen; es gilt $B_r(y) = B_r(x)$ für alle $y \in B_r(x)$.
3. Jede Vollkugel $\overline{B}_r(x)$ ist offen und abgeschlossen; es gilt $\overline{B}_r(y) = \overline{B}_r(x)$ für alle $y \in \overline{B}_r(x)$.
4. Haben zwei Kugeln einen Punkt gemeinsam, so ist eine von ihnen in der anderen enthalten.
5. Der Abstand zweier verschiedener Kugeln $B_r(x)$ und $B_r(y)$, die in einer Vollkugel $\overline{B}_r(z)$ enthalten sind, ist gleich r.

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*

Sei X ein normierter Raum.

1. Geben Sie offene Mengen A und B in X an, so daß die vier Mengen
$$A \cap \overline{B}, \quad B \cap \overline{A}, \quad \overline{A \cap B} \quad \text{und} \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$
sämtlich voneinander verschieden sind.
(Hinweis: Überlegen Sie es sich für $X = \mathbb{R}$.)
2. Zeigen Sie: $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ für alle $A, B \subseteq X$, falls A offen ist.
Gilt diese Relation auch ohne die Voraussetzung, daß A offen ist?