Christian Fleischhack Universität Hamburg

# Funktionalanalysis I

## Übungsblatt 2

Abgabetermin: Montag, 3. November 2008, zur Übung

**Erinnerung: Die für den 3. November 2008 vorgesehene Vorlesung wird verlegt.**

### Aufgabe 6 *(6 Punkte)*

Sei $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ die Norm auf $L^p(X)$. Beweisen Sie für alle $1 \leq p \leq \infty$

1. die Hölderungleichung, d. h.
$$\|fg\|_1 \quad \leq \quad \|f\|_p \, \|g\|_q$$
für alle $f \in L^p(X)$ und $g \in L^q(X)$ mit[1] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;
2. die Minkowskiungleichung, d. h.
$$\|f+g\|_p \quad \leq \quad \|f\|_p + \|g\|_p$$
für alle $f, g \in L^p(X)$.

### Aufgabe 7 *(6 Punkte)*

Zeigen Sie, daß $L^p(X)$ für alle $1 \leq p < \infty$ und jeden Maßraum $X$ ein normierter Raum ist.

*Hinweis: Vergessen Sie nicht, alle notwendigen Eigenschaften nachzuprüfen.*
*Hinweis$^2$: Vielleicht sind andere Aufgaben auf diesem Zettel hierbei ganz nützlich.*

### Aufgabe 8 *(3 Punkte)*

Geben Sie einen linearen Raum $X$ und zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf $X$ an, die nicht äquivalent zueinander sind. (Diese Aufgabe impliziert, wie üblich, daß die Nichtäquivalenz der von Ihnen angegebenen Normen zu beweisen ist.)

### Aufgabe 9 *(4 Punkte)*

Für welche (ggf. unbeschränkten) Intervalle $I$ in $\mathbb{R}$ gilt
- $L^1(I, \mathrm{d}x) \subseteq L^2(I, \mathrm{d}x)$;
- $L^1(I, \mathrm{d}x) = L^2(I, \mathrm{d}x)$;
- $L^1(I, \mathrm{d}x) \supseteq L^2(I, \mathrm{d}x)$?

---
[1] Dabei sei hier $\frac{1}{\infty} = 0$.