Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 4

Abgabetermin: Montag, 17. November 2008, zur Übung

Aufgabe 14 *(3 Punkte)*

Zeigen Sie: Für jeden linearen stetigen Operator $T : X_1 \longrightarrow X_2$ zwischen normierten Räumen X_1 und X_2 gilt

$$\|T\| \quad = \quad \inf\{\lambda > 0 \mid \|Tx\|_2 \leq \lambda \|x\|_1 \qquad \forall x \in X_1\}$$

Aufgabe 15 *(4 Punkte)*

Seien X, Y, Z normierte Räume sowie $A : Y \longrightarrow Z$ und $B : X \longrightarrow Y$ lineare stetige Abbildungen (versehen mit der Operatornorm). Zeigen Sie, daß $AB : X \longrightarrow Z$ beschränkt ist und $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ gilt.

Gilt stets $\|A^2\| = \|A\|^2$, falls $Z = Y$?

Aufgabe 16 *(6 Punkte)*

Sei N eine Teilmenge der ganzen Zahlen und sei $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$. Betrachte die „identische" Abbildung

$$\begin{array}{rccc} I : & L^{p_1}(N, \text{Zählmaß}) & \longrightarrow & L^{p_2}(N, \text{Zählmaß}). \\ & (x_n)_{n \in N} & \longmapsto & (x_n)_{n \in N} \end{array}$$

Für welche p_1, p_2, N ist diese Abbildung nicht nur wohldefiniert, sondern auch stetig? Bestimmen Sie in diesen Fällen die Norm von I.

Hinweis: Die Norm auf $L^{p_1}(N, \text{Zählmaß})$ ist wie üblich gegeben durch

$$\|(x_n)_{n \in N}\| \quad := \quad \left(\sum_{n \in N} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Aufgabe 17 *(3 Punkte)*

Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß X bzgl.

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} \quad := \quad \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \qquad\qquad \text{für alle } x, y \in X$$

ein reeller Hilbertraum ist.

Aufgabe 18 *(6 Punkte)*

Seien X_1 bzw. X_2 Unterhilberträume des endlichdimensionalen Hilbertraumes X sowie P_1 bzw. P_2 die zugehörigen Projektoren von X auf X_1 bzw. X_2. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n \to \infty} (P_1 P_2)^n$$

wohldefiniert und wieder ein Projektor ist. Bestimmen Sie zudem dessen Bildraum.