Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 5

Abgabetermin: Montag, 24. November 2008, zur Übung[1]

Aufgabe 19 *(4 Punkte)*

Seien X und Y unitäre Räume sowie $f : X \longrightarrow Y$ eine surjektive lineare Abbildung.
Zeigen Sie, daß f unitär ist, sobald f eine Isometrie der zu X bzw. Y gehörigen metrischen Räume ist.

Aufgabe 20 *(3 Punkte)*

Über welchen Grundkörpern (also $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) gilt die Umkehrung des Pythagoras?
Genauer: Über welchen Grundkörpern folgt im unitären Raum aus $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ bereits $x \perp y$?

Aufgabe 21 *(5 Punkte)*

Sei X ein separabler Hilbertraum, und sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren, deren Spann dicht in X ist.

1. Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von X, so daß
$$\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_N\} \quad = \quad \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_N\}$$
für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.
2. Welche Freiheit haben Sie bei der Wahl einer Orthonormalbasis mit obiger Eigenschaft?

Aufgabe 22 *(6 Punkte)*

Bezeichne $\dim_{\mathrm{HR}} X$ die Hilbertraumdimension eines Hilbertraums $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sowie $\dim_{\mathrm{VR}} X$ die Vektorraumdimension von X.

1. Zeigen Sie, daß $\dim_{\mathrm{HR}} X \leq \dim_{\mathrm{VR}} X$.
2. Zeigen Sie, daß $\dim_{\mathrm{HR}} X = \dim_{\mathrm{VR}} X$, falls eine der beiden Dimensionen endlich ist.
3. Gilt die Gleichheit noch, falls X separabel, aber nicht endlichdimensional ist?

Hinweis: Die Relationszeichen sind im Sinne der Kardinalität von Mengen zu verstehen. Es ist also insbesondere $\aleph_0(= |\mathbb{N}|)$ *von* $\aleph_1(= |\mathbb{R}|)$ *zu unterscheiden.*

Aufgabe 23 *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß die Einheitskugel in einem Hilbertraum X genau dann kompakt ist, wenn X (als Vektorraum) endlichdimensional ist.

[1] bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen