Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 6

Abgabetermin: Montag, 1. Dezember 2008, zur Übung[1]

Aufgabe 24 *(5 Punkte)*

Sei X aufgespannt von den Funktionen $f_\lambda(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ auf $\mathbb{R}$, und definiere für $f, g \in X$

$$\langle f, g\rangle \quad := \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{f} g \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X definiert und daß $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein überabzählbares Orthonormalsystem für $\overline{X}$, den Raum der fastperiodischen Funktionen, ist.

Aufgabe 25 *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß abgeschlossene lineare Unterräume reflexiver Banachräume wieder reflexiv sind.

Aufgabe 26 *(4 Punkte)*

Sei $1 \le p_1 \le p_2 < \infty$. Welche Implikationen bestehen zwischen den folgenden Aussagen:
1. f_n konvergiert schwach* gegen f in $L^\infty[0,1]$;
2. f_n konvergiert schwach gegen f in $L^{p_1}[0,1]$;
3. f_n konvergiert schwach gegen f in $L^{p_2}[0,1]$?

Finden Sie zudem eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty[0,1]$ mit $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die jedoch schwach* gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 27 *(5 Punkte)*

Sei V ein Vektorraum sowie $A \subseteq V$ eine absorbierende und sternförmige Teilmenge, d. h. $\bigcup_{t>0} tA = V$ bzw. $[0,1]A \subseteq A$. Definiere das Minkowskifunktional $p : V \longrightarrow [0,\infty)$ durch

$$p(x) \quad := \quad \inf\nolimits_{t>0}\{t \mid x \in tA\}.$$

Zeigen Sie für alle $x, y \in V$, $t \ge 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$:
- $p(tx) = tp(x)$;
- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, falls A konvex ist;
- $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$, falls A kreisförmig ist, d. h. $\alpha x \in A$ für alle $x \in A$ und $|\alpha| \le 1$;
- $\{v \in V \mid p(v) < 1\} \subseteq A \subseteq \{v \in V \mid p(v) \le 1\}$.

Aufgabe 28 *(5 Punkte)*

Sei X ein normierter Raum sowie $M \subseteq X$ abgeschlossen, beschränkt, konvex und mit einem inneren Punkt ausgestattet. Was können Sie über die Gestalt von M sagen? Welche der fünf Bedingungen an M darf man weglassen, ohne daß sich die möglichen Gestalten ändern?

Hinweis: Minkowskifunktional.

[1] bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen