

# Funktionalanalysis I

## Übungsblatt 7

Abgabetermin: Montag, 8. Dezember 2008, zur Übung<sup>1</sup>

### Aufgabe 29

(5 Punkte)

Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume. Für jedes  $T : X \rightarrow Y$  definiere die **duale Abbildung**  $T' : Y' \rightarrow X'$  via  $T'f := f \circ T$  für  $f \in Y'$ . Zeigen Sie für alle  $T \in L(X, Y)$  und  $S \in L(Y, Z)$ :

- $T' \in L(Y', X')$  sowie  $\|T'\|_{L(Y', X')} = \|T\|_{L(X, Y)}$ ;
- $T'S' = (ST)'$ ;
- $T'' \circ \iota_X = \iota_Y \circ T$  mit den üblichen  $\iota_X : X \rightarrow X''$  und  $\iota_Y : Y \rightarrow Y''$ .

*Bemerkung:  $T'$  heißt zuweilen auch transponierte oder adjungierte Abbildung.*

### Aufgabe 30

(7 Punkte)

Sei  $X$  ein Banachraum. Definiere

$$\begin{aligned} S^\perp &:= \{F \in X' \mid F(x) = 0 \quad \forall x \in S\} && \text{für } S \subseteq X \\ {}^\perp U &:= \{x \in X \mid F(x) = 0 \quad \forall F \in U\} && \text{für } U \subseteq X', \end{aligned}$$

und sei nun  $S$  ein abgeschlossener linearer Unterraum von  $X$ .

1. Welche Beziehungen gibt es zwischen  $X'/S^\perp$  und  $S'$  bzw. zwischen  $(X/S)'$  und  $S^\perp$ ?
2. Zeigen Sie, daß  $S^\perp$  schwach\*-abgeschlossen ist.
3. Bestimmen Sie  ${}^\perp(S^\perp)$ .

Wo kann die Voraussetzung, daß  $X$  vollständig ist, weggelassen werden?<sup>2</sup>

*Hinweis: Die Norm auf  $X/V$  für abgeschlossene Untervektorräume  $V$  sei definiert durch*

$$\|[x]\| := \inf_{v \in V} \|x - v\|.$$

*$X/V$  ist vollständig, falls  $X$  vollständig ist. Es gibt zwei Zusatzpunkte, wenn Sie dies zeigen.*

### Aufgabe 31

(5 Punkte)

Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume. Zeigen Sie für  $T \in L(X, Y)$ :

- $T'$  ist injektiv genau dann, wenn  $T$  dichtes Bild hat;
- $T$  ist injektiv genau dann, wenn  $T'$  schwach\*-dichtes Bild hat;

### Aufgabe 32

(7 Punkte)

Bestimmen Sie den schwachen Abschluß der Einheitssphäre in Banachräumen.

*Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen endlich- sowie unendlichdimensionalen Banachräumen.*

*Spezialtip: Nicht vom Ergebnis verwirren lassen!*

<sup>1</sup>bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen

<sup>2</sup>Bei der dritten Teilaufgabe heißt dies: Gilt das Ergebnis auch für nichtvollständiges  $X$ ? Daß  $X$  ein normierter Raum ist, soll natürlich bei allen drei Teilaufgaben vorausgesetzt bleiben.