

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 8

Abgabetermin: Montag, 15. Dezember 2008, zur Übung¹

Aufgabe 33

(6 Punkte)

Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie:

$$X \text{ separabel.} \iff X' \text{ separabel.}$$

Welche der beiden Implikationen gelten auch,

- wenn X nur als normiert und reflexiv vorausgesetzt wird;
- wenn X nur als normiert und vollständig vorausgesetzt wird?

Aufgabe 34

(6 Punkte)

Seien X und Y Banachräume sowie b eine Bilinearform auf $X \times Y$. Zeigen Sie, daß b stetig ist, sobald es partiell stetig ist.²

Aufgabe 35

(4 Punkte)

Sei $1 \leq p < q \leq \infty$.

Entscheiden Sie, ob l^p eine Menge erster oder eine Menge zweiter Kategorie in l^q ist.

Aufgabe 36

(4 Punkte)

Sei X ein abzählbar-unendlich-dimensionaler Vektorraum.

1. Bestimmen Sie sämtliche Normen auf X , die X zu einem Banachraum machen.
2. Gibt es darüber hinaus Metriken auf X , (die also nicht norminduziert sind und) die X zu einem vollständigen metrischen Raum machen?

Hinweis: Es reicht, die Normen bis auf Äquivalenz anzugeben.

Aufgabe 37

(5 Zusatzpunkte)

Auf welchen nichttrivialen normierten Räumen X gibt es stetige lineare Operatoren P und Q , für die $PQ - QP = \mathbf{1}_X$ gilt? Kommen Räume hinzu, wenn nur noch einer der beiden Operatoren stetig sein soll?

Hinweis: In Physikvorlesungen wird häufig mit einem Spurargument gezeigt, daß es keine solchen Operatoren auf endlichdimensionalen Hilberträumen gibt. Dieses Argument zieht hier in der Regel nicht. Die Betrachtung von $P^2Q - QP^2$ könnte jedoch ein Anfang sein.

¹bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen

²Das heißt: Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} b(x_n, y) = b(x, y)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b(x, y_n) = b(x, y)$ für $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ sowie feste $x \in X$ und $y \in Y$, so ist b stetig.