Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 9

Abgabetermin: Montag, 5. Januar 2009, zur Übung[1]

... und trotz Übungsaufgaben:
Ein besinnliches Weihnachtsfest und ein gesundes, erfolgreiches Neues Jahr!

Aufgabe 38 *(4 Punkte)*

Seien X und Y Banachräume. Zeigen Sie, daß die stetigen bijektiven linearen Abbildungen von X nach Y eine offene Teilmenge von $L(X,Y)$ bilden.

Aufgabe 39 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß ein stetiger Operator T auf einem Hilbertraum H genau dann normal ist, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in H$ gilt.

Aufgabe 40 *(4 Punkte)*

Sei $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig und $T_K : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ der zugehörige Fredholmsche Integraloperator, d. h.

$$(T_K f)(s) \quad := \quad \int_0^1 K(s,t)\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie, daß T_K genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\overline{K(s,t)} = K(t,s)$ für alle $s,t \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 41 *(5 Punkte)*

Sei T ein selbstadjungierter Operator auf einem komplexen Hilbertraum H. Zeigen Sie, daß $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$. Gilt die analoge Aussage noch für reelle Hilberträume[2]?

Aufgabe 42 *(5 Punkte)*

Sei $S : l^2 \longrightarrow l^2$ der Shiftoperator, der also der Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ die Folge $(0, x_0, x_1, \ldots)$ zuordnet.

- Bestimmen Sie S^*.
- Ist S isometrisch, unitär, selbstadjungiert bzw. normal?

Aufgabe 43 *(5 Punkte)*

Sei $T_a : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ für $a \in L^\infty[0,1]$ der Multiplikationsoperator $T_a\psi := a\psi$.

- Bestimmen Sie $\|T_a\|$ und T_a^*.
- Für welche a ist T_a unitär, selbstadjungiert, normal, isometrisch bzw. ein Projektor?

[1] bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen

[2] Die Definition der Selbstadjungiertheit sei dabei in natürlicher Weise auf reelle Hilberträume übertragen.