Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 11

Abgabetermin: Montag, 19. Januar 2009, zur Übung[1]

Aufgabe 50 *(2 Punkte)*

Seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf einem Vektorraum X, die X jeweils zu einem Banachraum machen. Zudem existiere $c \in \mathbb{R}$ mit $|||x||| \leq c\,\|x\|$ für alle $x \in X$.
Zeigen Sie, daß beide Normen äquivalent sind.

Aufgabe 51 *(6 Punkte)*

Sei A eine Algebra und $\|\cdot\|$ eine Norm auf A, so daß $(A, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. Sei zudem die Multiplikation auf A partiell stetig, d. h., $a \longmapsto ac$ und $b \longmapsto cb$ sind stetig für alle $c \in A$.
Zeigen Sie, daß auf A eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $|||\cdot|||$ existiert, so daß $(A, |||\cdot|||)$ eine Banachalgebra ist und, falls A ein Einselement e hat, zudem $|||e||| = 1$ gilt.

Hinweis: Denken Sie vielleicht mal über die Operatornorm nach.

Bemerkung: In gewisser Weise erklärt diese Übungsaufgabe, warum ich in der Vorlesung „oBdA. $\|e\| = 1$“ geschrieben habe. Herzlichen Dank für die entsprechende Rückfrage!

Aufgabe 52 *(6 Punkte)*

Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Zeigen Sie:
1. $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1} \equiv \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(a)\}$, falls $a \in A$ invertierbar;
2. $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$, falls $a, b \in A$.

Aufgabe 53 *(4 Punkte)*

Sei A eine Banachalgebra mit Eins, und seien $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$, paarweise kommutierend. Zeigen Sie, daß $a_1 \cdots a_n$ genau dann invertierbar ist, wenn jedes a_i invertierbar ist. Gilt diese Aussage auch für nichtkommutierende Elemente?

Aufgabe 54 *(5 Punkte)*

Sei a ein Element der Banachalgebra A mit Eins.
Zeigen Sie $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ für alle $f \in C^\omega(a)$ und $g \in C^\omega(f(a))$.

Aufgabe 55 *(5 Zusatzpunkte)*

Charakterisieren Sie, bis auf Isomorphie, alle endlichdimensionalen Banachalgebren mit 1.[2]

Hinweis: Aufgabe 51. Und keine Angst, die Lösung ist recht allgemein.

---

[1] bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen

[2] Ein Homomorphismus $\phi : A \longrightarrow B$ von Banachalgebren ist ein stetiger Operator mit $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ für alle $x, y \in A$. Zudem gilt: ϕ Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ ϕ bijektiv und ϕ, ϕ^{-1} Homomorphismen.