Funktionalanalysis I

Christian Fleischhack

Diese Übersicht listet die Überschriften der einzelnen Abschnitte der Vorlesung sowie stichpunktartig die jeweils darin behandelten Themen auf. Eine Gewähr für Vollständigkeit wird nicht übernommen. Kommentare (insbesondere korrigierende) sind herzlich willkommen!

0 Einleitung *1*

1 Räume

1.1 Metrische Räume

- Metrik, metrischer Raum
- Topologie metrischer Räume
- Konvergenz
- Vollständigkeit
- kompakt vs. folgenkompakt *2*
- stetig vs. folgenstetig
- Banachscher Fixpunktsatz

1.2 Normierte Räume

1.2.1 Definition

- Norm, normierter Raum, Banachraum

1.2.2 Räume beschränkter Funktionen

- allgemein, Folgen, $\mathbb{K}^n$

1.2.3 Räume stetiger Funktionen

- beschränkt, über Kompakta, über Lokalkompakta, Nullfolgen

1.2.4 Räume differenzierbarer Funktionen

- über Intervall, über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Einschub: Crashkurs Maß- und Integrationstheorie *3*

- Idee
- Maßräume
- Integraldefinition
- Konvergenzsätze
- Räume integrierbarer Funktionen

1.2.5 Räume integrierbarer Funktionen

- L^p-Räume, l^p-Räume
- Hölderungleichung, Minkowskiungleichung

1.2.6 Norm und Topologie *4*

- Normäquivalenz

1.2.7 Lineare Abbildungen

- Stetigkeitskriterium
- Operatornorm
- Beispiele (Matrizen, Integraloperatoren, Differentialoperatoren, Shiftoperator)

1.2.8 Dualräume *5*

- Definition, Beispiele

1.3 Hilberträume

1.3.1 Definition und Eigenschaften

- Skalarprodukt, unitärer Raum, Hilbertraum
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung
- Parallelogrammidentität

1.3.2 Orthogonalität, Dualität und quadratische Variationsprobleme *6*

- Orthogonalität
- Hauptsatz über quadratische Variationsprobleme
- Lotprinzip
- Unterhilbertraum
- Summe von Hilberträumen, Komplement
- Orthogonalprojektor
- Satz von Riesz (Dualraum) *7*
- energetisches Skalarprodukt

1.3.3 Fourierentwicklung

- Orthonormalbasis (Definition und Existenz)
- Besselsche Ungleichung
- Parsevalsche Gleichung *8*
- Fourierreihe
- l^2, $L^2[0, 2\pi]$, $L^2(\Omega)$, fastperiodische Funktionen
- Hilbertraumdimension
- separabel

1.4 Zusammenfassung *9*

2 Grundprinzipien der Banachraumtheorie

- Motivation

2.1 Satz von Hahn-Banach

2.1.1 Hahn-Banach für Vektorräume

- sublinear

- Hahn-Banach I (reelle Vektorräume)
- Hahn-Banach II (komplexe Vektorräume) *10*
- Hahn-Banach III (normierte Räume)
- Folgerungen

2.1.2 Reflexivität

- reflexiv
- Beispiele

2.1.3 Topologien auf X'

- erzeugte Topologie (Motivation: Produkttopologie) *11*
- schwache, schwach*-Topologie
- Schwach*-Kompaktheit der Einheitsvollkugel
- Reflexivität
- Nichtkompaktheit der Einheitsvollkugel in unendlich vielen Dimensionen *12*

2.1.4 Geometrische Interpretation

- Hahn-Banach IV (Trennungsversion)

2.1.5 Anwendungen

- Momentenproblem
- Dualität
- Tschebyschewapproximation *13*

2.2 Das Bairesche Kategorietheorem

- Bairesches Kategorietheorem
- nirgends dicht, 1. bzw. 2. Kategorie

2.2.1 Stetige, aber nirgends differenzierbare Funktionen

2.2.2 Satz von Banach-Steinhaus

- (punktweise) gleichmäßige Beschränktheit
- Satz von Banach-Steinhaus *14*
- Beschränkheit schwach konvergenter Folgen

2.2.3 Anwendung auf Fourierreihen

- nicht punktweise Konvergenz von Fourierreihen

2.2.4 Trias offen – invers – abgeschlossen

- Satz über die offene Abbildung (Banach-Schauder)
- Satz über die inverse Abbildung
- (graph)abgeschlossene Abbildungen *15*
- Satz über die abgeschlossene Abbildung
- Hellinger-Toeplitz-Theorem

[1] Beweis erst in folgender Vorlesung behandelt

3.5.5 Spektralsätze für normale Operatoren

3.6 Zusammenfassung

Literatur

[1] Bruce Blackadar: *Operator Algebras: Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras (Encyclopaedia of Mathematical Sciences 122).* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[2] John B. Conway: *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[3] Jürgen Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[4] Friedrich Hirzebruch und Winfried Scharlau: *Einführung in die Funktionalanalysis*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.

[5] Klaus Jänich: *Funktionentheorie*. Springer, Berlin, 1996.

[6] Gerard J. Murphy: *C^*-Algebras and Operator Theory*. Academic Press, San Diego, 1990.

[7] Michael Reed and Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 1 (Functional Analysis)*. Academic Press, Inc., London, 1995.

[8] Walter Rudin: *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[9] Gerald Teschl: *Functional Analysis*. 2008.
`http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf`.

[10] Joachim Weidmann: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1976.

[11] Dirk Werner: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

[12] Eberhard Zeidler: *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, 1995.