Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, 15. April 2009, zur Übung

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*

Sei $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis eines separablen Hilbertraumes H, und sei $e_\infty \in H \setminus L$, wobei $L := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e_i\}_i$ der Raum der endlichen Linearkombinationen der e_i ist. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist der durch

$$\begin{aligned} D(T) &:= \mathbb{C}e_\infty + L \\ T(ce_\infty + x) &:= \alpha c e_\infty + \beta x \qquad \forall c \in \mathbb{C}, x \in L \end{aligned}$$

gegebene Operator T auf H wohldefiniert bzw. für welche abgeschlossen? In welchen Fällen ist der Abschluß $\overline{\Gamma(T)}$ des Graphen von T der Graph eines Operators, also T abschließbar?

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*

Sei T ein Operator von H_1 nach H_2, und definiere durch $\langle x, y\rangle_T := \langle x, y\rangle_1 + \langle Tx, Ty\rangle_2$ ein Produkt auf $D(T)$.

1. Zeige, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ ein Skalarprodukt auf $D(T)$ ist.
2. Zeige, daß T genau dann abgeschlossen ist, wenn $\big(D(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_T\big)$ ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß jeder beschränkte (nicht notwendigerweise dicht definierte) Operator abschließbar ist.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

Sei T ein (dicht definierter) abschließbarer, injektiver Operator auf einem Hilbertraum. Zeige, daß T^{-1} genau dann abschließbar ist, wenn $\overline{T}$ injektiv ist. Zudem gilt dann $\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1}$.

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*

Wie klein kann der Schnitt dichter Teilräume eines separablen Hilbertraumes sein?

Genauer: Sei H ein separabler Hilbertraum. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\dim H$

$$\min\{\dim(V_1 \cap V_2) \mid V_1, V_2 \text{ sind dichte lineare Teilräume von } H\}.$$