Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 29. April 2009, zur Übung

Aufgabe 10 *(5 Punkte)*

Sei (X, μ) ein Maßraum, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion und T_f der Multiplikationsoperator $T_f(\psi) := f \cdot \psi$ auf $L^2(X, \mu)$ mit

$$D(T_f) \quad := \quad \{\psi \mid \psi, f \cdot \psi \in L^2(X, \mu)\}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, daß

$$\lambda \in \sigma(T_f) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\bigl(\{x \in X \mid |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon\}\bigr) > 0 \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Finden Sie ein analoges Kriterium für das Punktspektrum von T_f.

Aufgabe 11 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß jeder selbstadjungierte Operator reelles oder leeres Spektrum hat.
Existiert eigentlich zu jedem meßbaren $A \subseteq \mathbb{R}$ ein selbstadjungierter Operator mit Spektrum A? Ändert sich an der Antwort etwas, wenn A zudem als abgeschlossen vorausgesetzt wird?

Aufgabe 12 *(4 Punkte)*

Seien S und T dicht definierte Operatoren auf einem Hilbertraum H.
Zeigen Sie, daß $(ST)^* \supseteq T^* S^*$ gilt, falls auch ST dicht definiert ist.

Aufgabe 13 *(4 Punkte)*

Sei T ein selbstadjungierter Operator und U unitär.
Zeigen Sie, daß auch U^*TU selbstadjungiert ist sowie $\sigma(U^*TU) = \sigma(T)$ gilt.

Aufgabe 14 *(7 Punkte)*

Der numerische Wertebereich eines Operators T auf dem Hilbertraum H ist definiert als

$$W(T) \quad := \quad \{\langle x, Tx \rangle \mid x \in D(T), \|x\| = 1\} \quad \subseteq \quad \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie für dicht definiertes T:

1. $\|(\lambda - T)x\| \geq \operatorname{dist}(\lambda, W(T))$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $x \in D(T)$ mit $\|x\| = 1$;
2. $\|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1} \geq \operatorname{dist}(\lambda, W(T))$ für alle $\lambda \in \rho(T)$;
3. $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ mit $\inf \sigma(T) = \inf W(T)$ und $\sup \sigma(T) = \sup W(T)$ für T selbstadjungiert.