Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 6. Mai 2009, zur Übung

Aufgabe 15 ***(4 Punkte)***

Gibt es abgeschlossene Operatoren A und B auf irgendeinem Hilbertraum $H \neq 0$, so daß A dicht, B auf ganz H, aber AB lediglich auf $\{0\}$ definiert ist?

Aufgabe 16 ***(4 Punkte)***

Eine unitäre 1-Parameter-Gruppe $U(t)$ auf einem Hilbertraum H heißt

$$\begin{array}{rccl} \textbf{normstetig} & \Longleftrightarrow & U(t) & \text{ist stetig in } t; \\ \textbf{stark stetig} & \Longleftrightarrow & U(t)y & \text{ist stetig in } t \text{ für alle } y \in H; \\ \textbf{schwach stetig} & \Longleftrightarrow & \langle x, U(t)y \rangle & \text{ist stetig in } t \text{ für alle } x, y \in H. \end{array}$$

Finden Sie sämtliche allgemeingültigen Implikationen zwischen diesen Stetigkeitsbegriffen. Kommen Implikationen hinzu, wenn H als separabel bzw. als endlich-dimensional angenommen wird?

Aufgabe 17 ***(6 Punkte)***

Sei H einer der drei Hilberträume[1] $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, $AP(\mathbb{R})$ bzw. $L^2([0,1), \mathrm{d}x)$. Sei $U(s) := L_s^*$ der Pullback der natürlichen Linkswirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1)$, d. h., es gilt $U(s)\psi(t) = \psi(s+t)$ für $\psi \in H$. Entscheiden Sie für jeden der drei Fälle für H, ob $U(s)$

- eine 1-Parameter-Gruppe,
- unitär,
- schwach stetig,
- stark stetig

ist. Bestimmen Sie im Falle einer stark stetigen unitären 1PG die Erzeugende von $U(s)$.

Aufgabe 18 ***(5 Punkte)***

Sei H ein Hilbertraum, $x, y \in H$, T ein selbstadjungierter Operator auf H sowie P_λ die zu T gehörige Spektralschar. Zeigen Sie

$$\langle g(T)x, h(T)y \rangle \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \overline{g(\lambda)} h(\lambda) \, \mathrm{d}\langle x, P_\lambda y \rangle$$

für alle beschränkten meßbaren Funktionen $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
Verallgemeinern Sie dies, soweit möglich, auf den Fall unbeschränkter g und h.

Aufgabe 19 ***(4 Punkte)***

Ein Operator T auf H heiße **normal** genau dann, wenn T dicht definiert ist sowie $D(T) = D(T^*)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in D(T)$ gilt. Zeigen Sie:

- Ist T normal, so auch $T + \lambda$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Jeder normale Operator ist abgeschlossen.

[1] Zur Erinnerung: $AP(\mathbb{R})$ bezeichne den Hilbertraum der fastperiodischen Funktionen. Dessen Standardorthonormalbasis ist gegeben durch $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ mit $f_\lambda(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$. Siehe auch Aufgabe 24 in FA1.