Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 5

Abgabetermin: Mittwoch, 13. Mai 2009, zur Übung

Aufgabe 20 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß jeder dicht definierte Operator auf einem Hilbertraum mit nichtleerer Resolventenmenge[1] bereits abgeschlossen ist.

Aufgabe 21 *(4 Punkte)*

Kann eine unitäre, stark stetige 1-Parameter-Gruppe verschiedene Generatoren besitzen?

Aufgabe 22 *(7 Punkte)*

Seien U und V unitäre stark stetige Darstellungen von $\mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum H, die die Weylrelationen $U_t V_s = \mathrm{e}^{\mathrm{i}st} V_s U_t$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ erfüllen. Definiere

$$P \;:=\; \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(s^2+t^2)}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}st}\, U_t V_s \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,.$$

- Zeigen Sie, daß P ein (wohldefinierter) Orthogonalprojektor ist.
- Bestimmen Sie $\|PU_tV_sP\|$ in Abhängigkeit von t und s.
- Zeigen Sie, daß stets $PU_tV_sP = \|PU_tV_sP\|\, P$ gilt.
- Berechnen Sie $\langle U_tV_sx, U_{t'}V_{s'}x'\rangle$ für $x, x' \in PH$.

Hinweis: Es mag sinnvoll sein, die Teilaufgaben nicht in der o. g. Reihenfolge zu bearbeiten. U_t und V_s sind übliche Bezeichnungen für $U(t)$ bzw. $V(s)$.

Aufgabe 23 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}$ selbstdual ist.

Aufgabe 24 *(5 Punkte)*

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei T_λ der Operator $T_\lambda\psi := \mathrm{i}\psi'$ mit $D(T_\lambda) := \{\psi \mid \psi \in AC[0,1], \psi(0) = \lambda\psi(1)\}$. Für welche λ ist T_λ abgeschlossen, für welche symmetrisch und für welche selbstadjungiert?

Aufgabe 25 *(3 Punkte)*

Sei $T\psi := -\psi''$ definiert auf $D(T) := \{\psi \mid \psi, \psi' \in AC[0,1], \psi'' \in L^2[0,1], \psi(0) = 0 = \psi(1)\}$. Betrachte $\psi(x) := \frac{1}{2}x(1-x)$. Da T symmetrisch, gilt also $1 = \langle T\psi, T\psi\rangle = \langle \psi, T^2\psi\rangle = 0$. Wo liegt der Fehler?

[1] In der Vorlesung hatten wir die Resolventenmenge nur für abgeschlossene Operatoren T definiert. Im allgemeinen Falle gilt $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn $\lambda - T : D(T) \longrightarrow H$ bijektiv *und* $(\lambda - T)^{-1}$ *stetig* ist. Für abgeschlossene T ist die Stetigkeitsforderung obsolet, da $(\lambda - T)^{-1}$ für bijektive $\lambda - T$ automatisch stetig ist.