Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 27. Mai 2009, zur Übung

Aufgabe 30 *(3 Punkte)*

Sei U die Cayleytransformierte eines abgeschlossenen symmetrischen Operators T. Bestimmen Sie die Cayleytransformierte zu $-T$.

Aufgabe 31 *(5 Punkte)*

Finden Sie zu jedem Paar $(d_+, d_-) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^2$ einen symmetrischen Operator, dessen Defektindizes gerade d_+ und d_- sind.
Ist die Aufgabe weiterhin lösbar, wenn man „Operator“ durch „Differentialoperator“ ersetzt?

Aufgabe 32 *(4 Punkte)*

Sei T ein symmetrischer Operator und $x \in H$. Zeigen Sie, daß x genau dann ein analytischer Vektor[1] für T ist, wenn $x \in D(T^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und ein $t_0 > 0$ existiert, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|T^n x\|$$

für $0 \leq t \leq t_0$ konvergiert.

Aufgabe 33 *(6 Punkte)*

Sei $Tf := \mathrm{i}f' + q \cdot f$ mit $D(T) = C_0^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}t)$ und der Sprungfunktion q, d. h. $q(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $q(t) = 1$ für $t > 0$.

- Ist T wesentlich selbstadjungiert?
- Besitzt T eine dichte Menge analytischer Vektoren?

Aufgabe 34 *(5 Punkte)*

Sei (X, μ) ein Maßraum, $H = L^2(X, \mu)$ und T_f jeweils der Multiplikationsoperator zu $f \in H$.

- Geben Sie für jedes reellwertige $g \in H$ eine Menge analytischer Vektoren für T_g an, die einen dichten Teilraum von H aufspannen.
- Für welche $g \in H$ ist jedes Element in H ein analytischer Vektor für T_g?

Hinweis: Wie sehen die Spezialfälle $l^2 \equiv L^2(\mathbb{N}, \text{Zählmaß})$ bzw. $L^2(\mathbb{R}, dt)$ aus?

[1] x ist ein analytischer Vektor für T genau dann, wenn ein $M > 0$ existiert, so daß $x \in D(T^n)$ und $\|T^n x\| \leq M^n n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt.