Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 8

Abgabetermin: Mittwoch, 10. Juni 2009, zur Übung

Aufgabe 35 *(8 Punkte)*

Seien T_1 bzw. T_2 Operatoren auf den Hilberträumen H_1 bzw. H_2. Zeigen Sie:
- Sind T_1 und T_2 dicht definiert, so auch $T_1 \otimes T_2$ und $T_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T_2$.
- Sind T_1 und T_2 abschließbar, so auch $T_1 \otimes T_2$ und $T_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T_2$.
- Sind T_1 und T_2 symmetrisch[1], so auch $T_1 \otimes T_2$ und $T_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T_2$.

Welche Relationen bestehen zwischen
- $(T_1 \otimes T_2)^*$ und $T_1^* \otimes T_2^*$;
- $(T_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T_2)^*$ und $T_1^* \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T_2^*$?

Aufgabe 36 *(5 Punkte)*

Seien T_1 und T_2 kommutierende selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum H. Folgt daraus bereits, daß $T_1 + T_2$ und $T_1 T_2$
- wesentlich selbstadjungiert bzw.
- symmetrisch

sind?

Aufgabe 37 *(6 Punkte)*

Seien μ_1 und μ_2 Borelmaße auf $\mathbb{R}$. Sei zudem T_i für $i = 1, 2$ der Multiplikationsoperator $[T_i \psi](x_i) = x_i \psi(x_i)$ auf $H_i := L^2(\mathbb{R}, \mu_i)$ mit dem üblichen Definitionsbereich.
Bestimmen Sie $\overline{T_1 \otimes T_2}$ sowie $\overline{T_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T_2}$.
Lösen Sie die analoge Aufgabe für $H_2 := \mathbb{C}^2$ und $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $T_2 = \mathbf{1}$.

Aufgabe 38 *(7 Punkte)*

Sei $T\psi := \mathrm{i}\psi'$ der Ableitungsoperator auf $L^2([0,1], \mathrm{d}x)$.
Bestimmen Sie T^2, TT^*, T^*T sowie (falls T^*T abgeschlossen) $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ jeweils für
- $D(T) := C_0^\infty[0,1]$;
- $D(T) := AC[0,1]$;
- $D(T) := \{\psi \in AC[0,1] \mid \psi(0) = \psi(1)\}$.

---

[1] Wie üblich werde bei der Betrachtung von adjungierten Operatoren angenommen, daß der ursprüngliche Operator dicht definiert ist.