Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 9

Abgabetermin: **Montag**, 15. Juni 2009, zur Übung

Erinnerung: Nächste Woche finden folgende Lehrveranstaltungen statt:

15.6.09, 14.15 Uhr	**Übung**
17.6.09, 12.15 Uhr	**Vorlesung**
18.6.09, 12.00 Uhr	Vorlesung

Aufgabe 39 *(4 Punkte)*

Sei $H = L^2[0,1]$, $c \in [0,1]$ und $q(\psi,\phi) := \overline{\psi(c)}\phi(c)$ die Form mit $D(q) := C[0,1]$.
Bestimmen Sie die Vervollständigung von $(D(q), \|\cdot\|_q)$.

Aufgabe 40 *(6 Punkte)*

Sei q eine symmetrische, halbbeschränkte Sesquilinearform auf einem Hilbertraum H. Die zu q gehörige quadratische Form sei Q, und der zu q via $q(x,y) = \langle x, Ty\rangle$ gehörige selbstadjungierte Operator sei (sofern existent) T.

- Zeigen Sie, daß Q genau dann beschränkt ist, wenn T existiert und beschränkt ist.
- Vergleichen Sie $\|Q\|$ und $\|T\|$.

Hierbei heiße Q **beschränkt** genau dann, wenn ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, so daß $|Q(x)| \leq C\|x\|^2$ für alle $x \in D(q)$ gilt. Die Norm von Q sei dann gegeben durch

$$\|Q\| \;:=\; \sup_{\|x\|=1} |Q(x)|.$$

Aufgabe 41 *(4 Punkte)*

Sei S ein abgeschlossener Operator.
Zeigen Sie, daß $D(S^*S)$ bzgl. $\|\cdot\|_S$ dicht in $D(S)$ liegt.

Aufgabe 42 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie für jeden positiven selbstadjungierten Operator T und jede natürliche Zahl n:
T hat genau eine positive selbstadjungierte n-te Wurzel[1].

[1] S heißt n-te Wurzel von T genau dann, wenn $S^n = T$.