Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 10

Abgabetermin: Mittwoch, 24. Juni 2009, zur Übung

Aufgabe 43 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie $\ker T^k = \ker T^l$, falls T ein selbstadjungierter Operator und $k, l \in \mathbb{N}_+$ ist.

Aufgabe 44 *(4 Punkte)*

Seien A und B abschließbar sowie B relativ beschränkt bzgl. A.
Zeigen Sie $D(\overline{A}) \subseteq D(\overline{B})$ und $D(\overline{A}) \subseteq D(\overline{A+B})$.

Aufgabe 45 *(4 Punkte)*

Sei H_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Hilbertraum sowie $T_n \in L(H_n)$ jeweils ein beschränkter Operator. Setze $H := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ und $D(T) := \{(x_n) \in H \mid (T_n x_n) \in H\}$. Für $(x_n) \in D(T)$ definiere dann $T((x_n)) := (T_n x_n)$.
Zeigen Sie, daß T selbstadjungiert ist, sobald jedes T_n (bzgl. H_n) selbstadjungiert ist.

Aufgabe 46 *(7 Punkte)*

Sei $A := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ mit $D(A) := \{\psi \in L^2[0,1] \mid \psi, \psi' \in AC[0,1], \psi(0) = 0 = \psi(1)\}$. Weiter sei $q \in L^2[0,1]$ reell; der entsprechende Multiplikationsoperator werde wieder mit q bezeichnet. Zeigen Sie, daß q A-beschränkt ist und berechnen Sie die A-Schranke. Für welche q ist $A + q$ selbstadjungiert?

Aufgabe 47 *(10 Zusatzpunkte)*

Beweisen Sie den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren noch mal.

Strategie: Zerlege den Hilbertraum H geeignet in Teilhilberträume H_n, so daß $T_n := T|_{H_n}$ jeweils *beschränkt* und selbstadjungiert ist, und stückle dann aus den Spektralscharen für T_n eine Spektralschar für T zusammen. Den dafür notwendigen Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren dürfen Sie selbstverständlich als bekannt voraussetzen.

En detail: Sei P_λ die Spektralschar zu $A := (\mathbf{1} + T^*T)^{-1}$ und definiere

$$Q_n \ := \ P_{\frac{1}{n}} - P_{\frac{1}{n+1}},$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die direkte Summe der $H_n := Q_n H$ wieder H ist. Anschließend zeigen Sie, daß $T_n := T|_{H_n} = TQ_n$ beschränkt und selbstadjungiert auf H_n ist. Der „beschränkte“ Spektralsatz liefert für jedes T_n eine Spektralschar $E_{n,\lambda}$; diese sind Einschränkungen auf H_n einer Spektralschar E_λ auf H. Setze schließlich

$$\begin{aligned} S_n &:= \int_{(n-1,n]} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda \\ D(S) &:= \left\{x \in H \mid \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|S_n F_n x\|^2 < \infty\right\} \\ Sx &:= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} S_n F_n x \quad \text{für } x \in D(S) \end{aligned}$$

mit $F_n := E_n - E_{n-1}$. Mit Hilfe von Aufgabe 45 zeigen Sie $T = S$ und $T = \int \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$.