

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 12

Abgabetermin: Mittwoch, 8. Juli 2009, zur Übung

Aufgabe 53

(5 Punkte)

Seien S und T symmetrische Operatoren mit $D(S) = D(T)$ sowie a und b reelle Zahlen mit $b < 1$. Sei zudem $\|(S - T)x\| \leq a\|x\| + b(\|Sx\| + \|Tx\|)$ für alle $x \in D(S) = D(T)$.

Zeigen Sie:

- S ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn T wesentlich selbstadjungiert ist. In diesem Falle ist zudem $D(\overline{S}) = D(\overline{T})$.
- S ist genau dann selbstadjungiert, wenn T selbstadjungiert ist.

Aufgabe 54

(6 Punkte)

Die Begriffe „vollstetig“ und „kompakt“¹ können direkt von Hilberträumen auf Banachräume übertragen werden. Tun Sie dies, und untersuchen Sie die Implikationen zwischen diesen Begriffen im Banachraumfall.

Hinweis: Es sollte Sie nicht überraschen, daß beide Begriffe nicht mehr äquivalent sind.

Aufgabe 55

(4 Punkte)

Sei K ein kompakter Operator auf einem Hilbertraum H und $(s_n)_{n=1,2,\dots}$ die (ggf. endliche) monoton fallende Folge der von Null verschiedenen singulären Zahlen von K . Zeigen Sie

$$s_n = \inf_{K_n \in L(H), \text{rank } K_n < n} \|K - K_n\|.$$

Aufgabe 56

(4 Punkte)

In welchen Hilberträumen gibt es unbeschränkte Operatoren von endlichem Rang?

Aufgabe 57

(4 Punkte)

Bestimme das kleinste von 0 verschiedene *-Ideal in $L(H)$. Oder gibt's das gar nicht?

¹im Sinne von „Jede beschränkte Menge wird auf eine relativkompakte Menge abgebildet.“