

# Funktionentheorie

## Übungsblatt 1

*Die Lösungsblätter sind bis*

**Donnerstag, 13. April 2011, 11:00 Uhr**

*in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.*

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen der Funktionen  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß jede Ableitung einer  $\mathbb{K}$ -analytischen Funktion  $f$  wieder  $\mathbb{K}$ -analytisch ist. Geben Sie unter Verwendung der Potenzreihenentwicklung von  $f$  die der  $k$ -ten Ableitung  $f^{(k)}$  explizit an.

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei  $\mu$  ein endliches Borelmaß auf einem topologischen Raum  $X$  sowie  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Definiere  $f : \mathbb{C}(\overline{\text{Bild}g}) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f(z) := \int_X \frac{1}{g(x) - z} d\mu(x).$$

Zeigen Sie, daß  $f$  analytisch ist.

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie den Weg  $\gamma$ , der das Quadrat mit den Eckpunkten  $1, i, -1$  und  $-i$  (im mathematisch positiven Richtungssinn) durchläuft. Berechnen Sie explizit das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} z^n dz$$

für ganze  $|n| \leq 2$  durch Berechnung der Integrale über die differenzierbaren Teilwege.