

# Funktionentheorie

## Übungsblatt 2

Die Lösungsblätter sind bis

**Donnerstag, 21. April 2011, 11:00 Uhr**

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

### Aufgabe 5

(8 Punkte)

Sei  $R$  ein achsenparalleles Rechteck in  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$ .

- Berechnen Sie

$$\int_{\partial R} \bar{z} \, dz.$$

Haben Sie eine Vermutung?

- Bestätigt sich Ihre Vermutung, wenn Sie  $R$  durch eine Kreisscheibe mit Radius  $r$  ersetzen?
- Verifizieren Sie Ihre Vermutung gegebenenfalls (unter vernünftigen Annahmen).
- Ist das Integral  $\int_{\gamma} \bar{z} \, dz$  für beliebige geschlossene Wege  $\gamma$  bewegungsinvariant?

### Aufgabe 6

(5 Punkte)

Sei  $U$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion und  $z_0 \in U$ .

Zeigen Sie, daß die Koeffizienten  $c_n$  in der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

von  $f$  als Potenzreihe um  $z_0$  eindeutig sind.

### Aufgabe 7

(5 Punkte)

Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt und  $U$  eine Umgebung von  $K$ . Zeigen Sie, daß dann ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so daß aus  $z_0 \in K$  und  $|z - z_0| < \varepsilon$  bereits  $z \in U$  folgt.

*Hinweis: Analysis 1.*

### Aufgabe 8

(5 Punkte)

Zeigen Sie, daß  $\frac{1}{z}$  keine Stammfunktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  besitzt.

### Aufgabe 9

(5 Punkte)

Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  geschlossene Wege (bzgl. desselben Parameterbereichs) sowie  $z \in \mathbb{C}$ .

Zeigen Sie

$$|\gamma_1 - \gamma_2| < |z - \gamma_2| \implies \text{Ind}_{\gamma_1} z = \text{Ind}_{\gamma_2} z.$$

*Hinweis: Die Ungleichung gelte auf dem vollen Definitionsbereich. Untersuchen Sie  $\gamma := \frac{\gamma_1 - z}{\gamma_2 - z}$  und  $\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}}$ .*