

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 21. April 2011, 11:00 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 5

(8 Punkte)

Sei R ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen a und b .

- Berechnen Sie

$$\int_{\partial R} \bar{z} \, dz.$$

Haben Sie eine Vermutung?

- Bestätigt sich Ihre Vermutung, wenn Sie R durch eine Kreisscheibe mit Radius r ersetzen?
- Verifizieren Sie Ihre Vermutung gegebenenfalls (unter vernünftigen Annahmen).
- Ist das Integral $\int_{\gamma} \bar{z} \, dz$ für beliebige geschlossene Wege γ bewegungsinvariant?

Aufgabe 6

(5 Punkte)

Sei U offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und $z_0 \in U$.

Zeigen Sie, daß die Koeffizienten c_n in der Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

von f als Potenzreihe um z_0 eindeutig sind.

Aufgabe 7

(5 Punkte)

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und U eine Umgebung von K . Zeigen Sie, daß dann ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß aus $z_0 \in K$ und $|z - z_0| < \varepsilon$ bereits $z \in U$ folgt.

Hinweis: Analysis 1.

Aufgabe 8

(5 Punkte)

Zeigen Sie, daß $\frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.

Aufgabe 9

(5 Punkte)

Seien γ_1 und γ_2 geschlossene Wege (bzgl. desselben Parameterbereichs) sowie $z \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie

$$|\gamma_1 - \gamma_2| < |z - \gamma_2| \implies \text{Ind}_{\gamma_1} z = \text{Ind}_{\gamma_2} z.$$

Hinweis: Die Ungleichung gelte auf dem vollen Definitionsbereich. Untersuchen Sie $\gamma := \frac{\gamma_1 - z}{\gamma_2 - z}$ und $\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}}$.