Christian Fleischhack Universität Paderborn

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 5. Mai 2011, 11:00 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 14 *(5 Punkte)*

Sei p ein injektives Polynom (über $\mathbb{C}$). Bestimmen Sie seinen Grad.

Aufgabe 15 *(5 Punkte)*

Sei p ein Polynom und R so groß, daß sämtliche Nullstellen von p innerhalb von $B_R(0)$ liegen. Bestimmen Sie

$$\int_{\partial B_R(0)} \frac{p'}{p}\, \mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 16 *(5 Punkte)*

Sei $f : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $\|f\|_\infty \leq 1$.
Finden Sie eine obere Schranke für $|f'(0)|$. Ist Ihre Schranke optimal?

Hinweis: Die Aussage $|f'(0)| < \infty$ liefert keine Punkte.

Aufgabe 17 *(7 Punkte)*

Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) \;\; := \;\; \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}\,.$$

Zeigen Sie, daß f auf $B_1(0)$ holomorph ist, aber keine analytische Fortsetzung auf eine zusammenhängende offene Menge besitzt, die $B_1(0)$ echt enthält.

Hinweis: Betrachten Sie $\lim_{r\uparrow 1} |f(r\varepsilon)|$, wobei ε eine Einheitswurzel ist, also $\varepsilon^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}_+$ gilt.

Aufgabe 18 *(8 Punkte)*

Lösen Sie die folgende Aufgabe sowohl für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen und $f_n : U \longrightarrow \mathbb{K}$ für jedes n bzgl. $\mathbb{K}$ differenzierbar.
Folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von f_n gegen ein $f : U \longrightarrow \mathbb{K}$ bereits die $\mathbb{K}$-Differenzierbarkeit von f?