

Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 12. Mai 2011, 11:00 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 19

(4 Punkte)

Sei γ der Weg, der den Einheitskreis im mathematisch positiven Richtungssinn durchläuft, sowie γ^{-1} der zugehörige inverse Weg. Sind beide Wege (bzgl. \mathbb{C}) homotop?

- Lautet Ihre Antwort „ja“, so geben Sie die Homotopie explizit an.
- Lautet Ihre Antwort „nein“, so beweisen Sie dies.

Aufgabe 20

(4 Punkte)

Zeigen Sie, daß für offenes U mit $z_0 \in U$ sowie holomorphes $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. f hat eine wesentliche Singularität in z_0 .
2. Zu jedem $w \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge (z_n) mit $z_n \rightarrow z_0$ und $f(z_n) \rightarrow w$.

Aufgabe 21

(20 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden zehn Funktionen

- alle Nullstellen und deren jeweilige Ordnung;
- alle isolierten Singularitäten;
- alle hebbaren Singularitäten sowie jeweils den Funktionswert in der Hebungsstelle;
- alle Polstellen und deren jeweilige Ordnung sowie den jeweiligen Hauptteil;
- alle wesentlichen Singularitäten:

$$\sin z^3 \quad \text{und} \quad \cos z^3,$$

$$\frac{\sin z}{z} \quad \text{und} \quad \frac{\cos z}{z},$$

$$z^n \sin \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad \tan z,$$

$$e^{\frac{1}{z}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(1 - e^z)^2},$$

$$\frac{z^2 + 1}{(z^2 + z + 1)(z - 1)^2} \quad \text{und} \quad (z^4 - 4)(1 - e^z).$$