

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 26. Mai 2011, 11:00 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 27

(10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

1. Bestimmen Sie alle Polstellen von f nebst Ordnung.
2. Bestimmen Sie die ersten zehn Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von f um 0.
3. Fällt Ihnen eine Gesetzmäßigkeit zwischen je drei aufeinanderfolgenden Koeffizienten auf? Beweisen Sie diese (wenn gefunden).
4. Finden Sie eine explizite Formel für die Koeffizienten.
5. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe um 0.

Hinweis: Manchmal ist Partialbruchzerlegung sinnvoll. Manchmal weniger.

Aufgabe 28

(6 Punkte)

Seien f und g holomorph in einem Kreisring um a mit Laurentreihen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (z - a)^n.$$

Zeigen Sie, daß fg eine Laurentdarstellung

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n (z - a)^n$$

in demselben Kreisring besitzt und bestimmen Sie die Koeffizienten b_n in Abhängigkeit der Laurentkoeffizienten zu f bzw. g .

Hinweis: Cauchyprodukt. Und Konvergenznachweise nicht vergessen.

Aufgabe 29

(6 Punkte)

Bestimmen Sie für jedes ganze n das Residuum der Funktion $f(z) := (1 - e^{-z})^n$ an der Stelle $z = 0$.

Aufgabe 30

(8 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x}$$

für alle $|a| < 1$.