Christian Fleischhack Universität Paderborn

Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 16. Juni 2011, 11:00 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 35 *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie alle biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ auf sich.

Aufgabe 36 *(6 Punkte)*

Sei G ein Gebiet, welches die 0 enthält.
Zeigen Sie, daß es auf G keine holomorphe n-te Wurzel[1] gibt.

Aufgabe 37 *(7 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(z) \quad := \quad \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$

gegeben.

- Bestimmen Sie das Bild der oberen Halbebene H unter f.
- Zeigen Sie, daß H von f biholomorph auf $f(H)$ abgebildet wird.
- Bestimmen Sie dort die Umkehrabbildung.

Aufgabe 38 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_+} \frac{1}{n^z}$$

auf $\{\mathrm{Re}\ z > 1\}$ eine holomorphe Funktion definiert.

Aufgabe 39 *(10 Punkte)*

Bestimmen Sie die Menge A aller $a \in \mathbb{C}$, für die

$$f_a(z) \quad := \quad \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

die Einheitskreisschreibe B_1 biholomorph auf sich abbildet. Bestimmen Sie in diesen Fällen explizit die Umkehrabbildung.
Zeigen Sie schließlich, daß für alle Folgen $(a_n) \subseteq A$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. (f_{a_n}) konvergiert kompakt auf B_1 gegen eine nichtkonstante Funktion.
2. Es gibt Punkte $u, v \in B_1$, so daß $\big(f_{a_n}(u)\big)$ und $\big(f_{a_n}(v)\big)$ gegen verschiedene Werte gehen.
3. (a_n) konvergiert in A.

[1] Eine Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt genau dann **n-te Wurzel**, falls $f(z)^n = z$ für alle $z \in G$ gilt.