Christian Fleischhack Universität Paderborn

Funktionentheorie

Übungsblatt 10

Die Lösungsblätter sind bis

Mittwoch, 22. Juni 2011, 13:00 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 40 *(6 Punkte)*

Gibt es ein Gebiet G in $\mathbb{C}$, so daß $\mathbb{R}_+$ in G enthalten ist und $a^{bc} = (a^b)^c$ für alle $a, b, c \in G$ gilt?

Hinweis: Die Potenz soll holomorph sein. Sprünge zwischen Zweigen sind also nicht erlaubt.

Aufgabe 41 *(5 Punkte)*

Seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z_1, z_2 \in G$.
Zeigen Sie, daß es einen Automorphismus von G gibt (also eine biholomorphe Abbildung von G auf G), die z_1 in z_2 überführt.

Aufgabe 42 *(6 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-z}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ kompakt konvergiert.

Aufgabe 43 *(7 Punkte)*

Sei X ein metrischer Raum und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$, für die gilt:

$$\text{Für jede konvergente Folge } (x_n) \text{ in } X \text{ konvergiert auch } \big(f_n(x_n)\big) \text{ in } \mathbb{C}. \tag{1}$$

Zeigen Sie:
1. Der Grenzwert $(f_n(x_n))$ hängt nur vom Grenzwert der Folge (x_n) ab.
2. (f_n) konvergiert punktweise gegen ein stetiges $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$.
3. (f_n) konvergiert kompakt gegen dieses f.

Zeigen Sie zudem, daß jede kompakt gegen eine stetige Funktion konvergierende Folge (f_n) bereits die Bedingung (1) erfüllt.

Hinweis: Es wird nicht angenommen, daß die f_n selbst bereits stetig sind.