

Funktionentheorie

Übungsblatt 11

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 30. Juni 2011, 11:00 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 44

(6 Punkte)

Sei G ein Gebiet, welches die 0 enthält, sowie $f : G \rightarrow G$ eine holomorphe Funktion, deren Taylorreihe mit $z + a_k z^k$ beginnt, wobei $k > 1$ ist.

Bestimmen Sie für alle $n \geq 1$ die jeweils ersten beiden Terme in der Taylorreihe von $f^{[n]}$.

Hinweis: Die n -Iterierte $f^{[n]}$ von f ist die n -fache Hintereinanderschaltung $f \circ \dots \circ f$ von f .

Aufgabe 45

(8 Punkte)

Sei G ein beschränktes Gebiet und $(f_n) \subseteq \text{Aut } G$ eine Folge von Automorphismen von G , die punktweise gegen ein holomorphes $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie:

1. Ist f nicht konstant, so ist $f \in \text{Aut } G$.
2. Ist f konstant, so ist $f(G) \subseteq \partial G$.

Aufgabe 46

(9 Punkte)

Sei G ein beschränktes Gebiet und $f : G \rightarrow G$ holomorph. Zeigen Sie, daß f ein Automorphismus von G ist, sobald f zwei verschiedene Fixpunkte besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie die Iteriertenfolge $(f^{[n]})$ zu f (vgl. Aufgabe 44). Zeigen Sie, daß diese eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt, deren Limes g nichtkonstant ist. Schließen Sie hieraus, daß eine (ggf. andere) Teilfolge der Iteriertenfolge kompakt gegen die Identität geht. Folgern Sie dann, daß f ein Automorphismus ist.¹

Aufgabe 47

(6 Punkte)

Seien (a_n) und (b_n) Folgen in \mathbb{C} mit $|a_n - b_n| \rightarrow 0$. Auf welchen Mengen konvergiert

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - a_n}{z - b_n}$$

gleichmäßig? Wo liefert es eine holomorphe Funktion?

¹ f ist übrigens bereits dann ein Automorphismus, falls eine Teilfolge kompakt gegen einen Automorphismus konvergiert.