Proseminar Analysis – Fourierreihen

Bezogen auf den Vortragstermin gibt es folgende Fristen:

- **Abgabe einer LaTeX-Ausarbeitung**
  minus 12 Tage, also Mittwoch vorvorangehende Woche (PDF via E-Mail reicht)
- **Besprechung von Ausarbeitung und Vortragskonzept:**
  minus 7 Tage, also Montag vorangehende Woche (zwischen 13 und 14 Uhr)

Der 24.5. entfällt, da Pfingstmontag. Der 5.7. entfiele, da ich an diesem Tag aller Voraussicht nach meine Antrittsvorlesung halte (zu der Sie natürlich herzlich eingeladen sind). Die Vorbesprechung, die auf den 24.5. fallen würde, wird separat vereinbart.

Allgemeiner Hinweis: Bitte verstehen Sie Ihren Vortrag nicht als losgelöst von den anderen. Es ist durchaus ratsam, sich mit den Themen der anderen Studenten zumindest kursorisch zu beschäftigen.

... und nun die gewünschten Hinweise zu den einzelnen Vorträgen:

1. **Einführung in die Fourierreihen, Motivation** *Christian Fleischhack* 19.4.
   Literaturhinweise: Kapitel 132 und 133 in [1]

2. **Hilberträume** *Carsten Quill* 26.4.
   - Definition Skalarprodukt, unitärer Raum (= Prähilbertraum), Vollständigkeit, Hilbertraum
   - Cauchy-Schwarz-Ungleichung, folglich ist jeder unitäre Raum normiert
   - Verhältnis normierter zu unitären Räumen, insb. Parallelogrammidentität (hinreichendes und notwendiges Kriterium in normierten Räumen, daß Norm durch Skalarprodukt induziert)
   - Beispiele (Euklidischer Raum $\mathbb{K}^n$, Raum $L^2(\mathbb{R})$ der quadratintegrablen Funktionen, Folgenraum l^2; evtl. Verallgemeinerungen $l^2(X)$, $L^2(X)$)

   Literaturhinweise: Kapitel V.1 in [4] oder Abschnitte 1.2 und (Teile von) 1.3 in [3].
   Allgemeiner Hinweis: Alle Integrale sollten zunächst heuristisch betrachtet werden, also in dem naiven Sinne, den man aus der Schule kennt. Das reicht mit Ausnahme der Vollständigkeit von L^2 zunächst völlig aus.

3. **Hauptsatz über quadratische Variationsprobleme, orthogonale Zerlegung** *Kai Schäfer* 3.5.
   - Hauptsatz über quadratische Variationsprobleme
   - Definition orthogonale Zerlegung, orthogonale Summe, orthogonales Komplement, Unterhilbertraum
   - Existenz (via Hauptsatz) und Vollständigkeit orthogonaler Komplemente
   - Eindeutigkeit der orthogonalen Zerlegung
   - Orthogonale Projektion

   Literaturhinweise: Abschnitte 2.4 und 2.9 in [5]
   Allgemeiner Hinweis: evtl. orthogonale Projektion erst im nächsten Vortrag

4. **Satz von Riesz, energetisches Skalarprodukt** *Erik Messerli* 10.5.
   - Definition Dualraum
   - Satz von Riesz (Antiisomorphie von Raum und Dualraum)
   - energetisches Skalarprodukt
   - 2. Beweis des Hauptsatzes über quadratische Variantionsprobleme (via energetisches Skalarprodukt)

- Anwendung Dirichletproblem: Existenz der Lösung von

$$\begin{aligned} u'' &= f \quad \text{auf } [a,b] \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0. \end{aligned}$$

Literaturhinweise: Abschnitte 2.10, 2.13 und 2.7 in [5] sowie dortige Verweise
Allgemeiner Hinweis: evtl. orthogonale Projektion erst in diesem Vortrag. Nicht vom Auftreten von Sobolewräumen verwirren lassen; kann in der Tiefe weitgehend ignoriert werden. Auf Wunsch kann ich Ausblick auf Sobolewraumtheorie machen.

5. **Fourierzerlegung I: abstrakt** *Benjamin Bykowski* 17.5.
- Definition Orthonormalbasis (ONB)
- Existenz von Orthonormalbasen in Hilberträumen (Beweis via Lemma von Zorn)
- Satz des Pythagoras
- Besselsche Ungleichung
- Definition Fourierreihe, Fourierkoeffizienten
- Parsevalsche Gleichung
- Kriterien für ONB-Eigenschaft
- Klassifikation der Hilberträume (alle l^2-Räume)
- Separabilität, Klassifikation separabler Hilberträume ($\mathbb{K}^n$ und l^2)

Literaturhinweise: Abschnitt 1.5 in [3]
Allgemeiner Hinweis: Die beiden letzten Punkte (Klassifikation und Separabilität) sind fakultativ. Lediglich ein kurzer Hinweis, daß eine Klassifikation möglich ist und daß es insb. nur die Standardbeispiele $\mathbb{K}^n$ und l^2 im separablen Falle gibt, sollte im Vortrag enthalten sein. Insbesondere der l^2 ist von zentraler Bedeutung, da er isomorph zu den üblichen Räumen quadratintegrabler Funktionen ist.

6. **Fourierzerlegung II: konkret** *Marcel Freitag* 31.5.
- Trigonometrische Funktionen als Basis von $L^2([0, 2\pi])$
- Übersetzung der abstrakten Resultate des vorangegangenen Vortrags (insb. Bessel und Parseval) in diesen Fall
- Dirichletkern
- Riemannscher Lokalisierungssatz

Literaturhinweise: Kapitel 134 und 135 in [1].
Allgemeiner Hinweis: Für die komplette Übersetzung abstrakt–konkret ist noch die Vollständigkeit des Raumes der trigonometrischen Funktionen notwendig. Diese soll hier aber noch nicht diskutiert werden, sondern einfach als gegeben angenommen (Kapitel 141; Parseval und Bessel siehe auch Kapitel 142).

7. **Punktweise Konvergenz klassischer Fourierreihen** *Alexander Vogel* 7.6.
- beschränkte Variation
- Dirichletsche Regel
- stückweise ...

Literaturhinweise: Kapitel 136 in [1], insbesondere die Sätze 1 bis 4; entsprechende Verweise auf Kapitel 85 bzw. 91 in [2] auflösen (letzteres Buch steht mir derzeit nicht zur Verfügung, da ich selbiges in der UB vor einiger Zeit wegen Vorbestellung wieder abzugeben hatte; deshalb keine genaueren Literaturverweise an dieser Stelle).

8. **Gleichmäßige Konvergenz klassischer Fourierreihen** *Lucas Pauly* 14.6.
- Sätze 137.1 und 137.2 in [1]
- evtl. Satz 136.5 in [1]

Literaturhinweise: Kapitel 137 in [1], ggf. noch Satz 136.5 in [1]

9. **Vollständigkeit und Beispiele** *Tobias Siekmann* 21.6.
   - Vollständigkeit des Raumes der trigonometrischen Funktionen unter Verwendung der Vollständigkeit von $L^2(I)$
   - Beispiele für Fourierentwicklungen

   Literaturhinweise: Kapitel 141 und 138 in [1]
   Allgemeiner Hinweis: Die Vollständigkeit von $L^2(I)$ für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ soll einfach als gegeben angenommen werden. Der Beweis ist erst im Rahmen der Maßtheorie verständlich. – Bei den Beispielen sollte sich die Auswahl daran orientieren, daß die in den vorangegangenen Vorträgen dargestellten Sätze illustriert werden.

10. **Cesaro-Summierbarkeit**
    -

    Literaturhinweise:

11. **Abel-Summierbarkeit**
    -

    Literaturhinweise:

12. **Differentiation und Integration von Fourierreihen**
    -

    Literaturhinweise:

13. **Abschätzungen der Koeffizienten**
    -

    Literaturhinweise:

Literatur

[1] Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Bd. 2*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[2] Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Bd. 1*. B. G. Teubner, Stuttgart, 19??.

[3] Joachim Weidmann: *Lineare Operatoren in Hilberträumen: Teil I: Grundlagen*. B. G. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2003.

[4] Dirk Werner: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

[5] Eberhard Zeidler: *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, 1995.