Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 3

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 4. November 2010, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 9 *(5 Punkte)*

Beweisen Sie, daß $(A, B) \longmapsto AB$ als Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}^{n\times n}$ stetig ist. Ist die Abbildung auch differenzierbar?

Aufgabe 10 *(6 Punkte)*

1. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ eine differenzierbare Abbildung mit $f(0) = \mathbf{1}$. Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det f$ in $t = 0$.
2. Sei nun $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, für die $\det \mathrm{e}^{tX} = 1$ für alle t gilt. Welche Spur hat X?

Aufgabe 11 *(8 Punkte)*

Lösen Sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12 *(12 Punkte)*

Gegeben sei ein homogenes System $\dot{y} = A(t)y$ der Ordnung n, d. h., gesucht ist $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ für stetiges $A : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, daß man dieses System durch Finden einer (nichttrivialen) Lösung (zumindest lokal) zu einem wieder homogenen System der Ordnung $n - 1$ reduzieren kann.

Genauer: Verwenden sie hierfür den Ansatz $y = \varphi x + z$, wobei $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die bekannte Lösung, $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dagegen zu bestimmen und $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Hilfsfunktion ist. Nehmen Sie oBdA. an, daß die erste Komponente von x ungleich 0 auf I ist, und setzen Sie die erste Komponente von z gleich 0.

- Bestimmen Sie φ in Abhängigkeit von z und der ersten Komponente von x.
- Bestimmen Sie damit das reduzierte homogene System linearer Differentialgleichungen, welches die $n - 1$ nichttrivialen Komponenten von z erfüllen.
- Zeigen Sie, daß jedes Fundamentalsystem des reduzierten Systems zusammen mit x ein Fundamentalsystem des vollen Systems $\dot{y} = A(t)y$ liefert.
- Bestimmen Sie als Beispiel den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} y$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$. Sie dürfen verwenden, daß $y(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ eine Lösung ist.