Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 4

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 11. November 2010, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 13 *(6 Punkte)*

Gegeben seien ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und stetige reellwertige Funktionen $a_{n-1}, \ldots, a_0$ auf I.
Zeigen Sie:

1. Der Raum V aller Lösungen von
$$y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t) y \quad = \quad 0$$
ist ein n-dimensionaler Untervektorraum von $C(I)$.
2. Für jedes $t_0 \in I$ ist
$$\begin{array}{rccc} \ell: & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & y & \longmapsto & \big(y^{(n-1)}(t_0), \ldots, y(t_0)\big) \end{array}$$
ein Vektorraumisomorphismus.

Aufgabe 14 *(6 Punkte)*

Sei $A : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus des Vektorraums V sowie $f = pq$ ein Polynom mit teilerfremden Faktoren p und q. Zeigen Sie, daß
$$\ker f(A) \quad = \quad \ker p(A) \oplus \ker q(A)\,.$$

Aufgabe 15 *(6 Punkte)*

Gegeben seien eine Funktion $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sowie eine Lösung y der Differentialgleichung $\ddot{y} = f(y, \dot{y})$. Wie oft ist y mindestens stetig differenzierbar?

Aufgabe 16 *(6 Punkte)*

Sei $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die nirgends verschwindet.
Zeigen Sie, daß eine stetige Abbildung $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ existiert, so daß γ eine Lösung von $\dot{y} = A(t)y$ ist.

Hinweis: Solche Funktionen γ werden auch als Wege oder Kurven bezeichnet.

Aufgabe 17 *(6 Punkte)*

Zeigen Sie: Die Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat eine (nichttriviale) periodische[1] Lösung mit Periode τ genau dann, wenn $1 - \mathrm{e}^{\tau A}$ singulär ist.

---

[1] $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt periodisch mit Periode $\tau \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $y(t + \tau) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.