Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 6

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 25. November 2010, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 21 *(7 Punkte)*

Untersuchen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -42y_1 + 1001y_1y_2^{37} \\ \dot{y}_2 &= -y_1^2y_2^{36} - \mathrm{e}^{111}\pi^{23}y_2^{111} \end{aligned}$$

auf Gleichgewichtspunkte und bestimmen Sie deren Stabilitätsverhalten.

Hinweis: Wenn alles nichts hilft, hilft vielleicht der Ansatz $u(y_1, y_2) := a_1y_1^2 + a_2y_2^2$ *als Ljapunowfunktion mit geeigneten* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 22 *(14 Punkte)*

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Umgebung des Ursprungs, und sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0,0) = 0$. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 f(y_1, y_2) + y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 \qquad\qquad - y_2 f(y_1, y_2)\,. \end{aligned}$$

1. Entscheiden Sie in Abhängigkeit des lokalen Verhaltens von f um $(0,0)$, ob $(0,0)$ ein stabiler, ein asymptotisch stabiler oder ein instabiler Gleichgewichtspunkt für obiges Differentialgleichungssystem ist.
2. Welcher Fall liegt vor für

   a) $$f(y_1, y_2) := \mathrm{e}^{y_1} \ln(y_2^2 + 1)$$

   b) $$f(y_1, y_2) := \mathrm{e}^{y_1} \ln(y_2^2 + 1) + \mathrm{e}^{y_2} \ln(y_1^2 + 1)$$

   c) $$f(y_1, y_2) := \mathrm{e}^{y_1} \ln(y_2^2 + 1) - \mathrm{e}^{y_2} \ln(y_1^2 + 1)$$

   d) $$f(y_1, y_2) := y_1^2 + y_2^2 - y_1^4 - y_2^4\,?$$

Hinweis: Standard-Ljaponuwfunktion.

Aufgabe 23 *(6 Punkte)*

Finden Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein Vektorfeld X auf U ohne Singularitäten, so daß zu jedem $T > 0$ eine Integralkurve zu X existiert, die Periode T hat.

Aufgabe 24 *(8 Zusatzpunkte)*

Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge sowie $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Umgebung von $K \times \{0\}$.
Zeigen Sie, daß dann ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß auch noch $K \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U$.