Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 10

Die Lösungsblätter sind bis

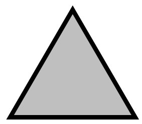
Donnerstag, 6. Januar 2011, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

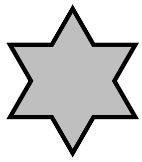
... und trotz Übungsaufgaben:
Ein besinnliches Weihnachtsfest und ein gesundes, erfolgreiches Neues Jahr!

Aufgabe 39 ***(15 Zusatzpunkte)***

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1; dies sei Polygon Nummer 0. Nun konstruieren Sie induktiv das Polygon Nummer $k+1$ aus dem mit Nummer k, indem Sie das mittlere Drittel einer jeden Kante des Polygons Nummer k durch zwei Kanten ersetzen, so daß diese beiden neuen Kanten mit der alten, gestrichenen „Drittelkante“ ein gleichseitiges Dreieck bilden, welches nach außen „zeigt“ (siehe auch Skizze). Betrachten Sie schließlich die Grenzfigur S, d. h. die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, die sich als Grenzwerte von Folgen (x_n) darstellen lassen, wobei x_n jeweils ein Punkt im Polygon Nummer n sei.



Polygon 0



Polygon 1

Bestimmen Sie die Hausdorff-Dimension von S.

Betrachten Sie hierzu für reelle α bzw. $\varepsilon > 0$

$$h_{\alpha,\varepsilon}(S) \quad := \quad \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{diam} A_n]^\alpha \,\Big|\, S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;\ \operatorname{diam} A_n \leq \varepsilon\Big\}$$

und das α-dimensionale äußere Hausdorff-Maß

$$h_\alpha(S) \quad := \quad \sup_{\varepsilon>0} h_{\alpha,\varepsilon}(S)\,.$$

Die Hausdorff-Dimension $\dim_H S$ von S ist dann gegeben durch

$$\dim_H S \quad := \quad \inf\{\alpha \mid h_\alpha(S) = 0\} \quad = \quad \sup\{\alpha \mid h_\alpha(S) = \infty\}\,.$$

Hinweis: Skizzieren Sie die Polygone Nr. 2 und 3. Wählen Sie erstmal A_n als Vollkreise.

Aufgabe 40 ***(5 Punkte)***

Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

$$\text{Für alle } (A_n) \subseteq \mathcal{R} \text{ mit } A_N \uparrow A \in \mathcal{R} \text{ gilt } \mu(A_n) \uparrow \mu(A). \quad \Longrightarrow \quad \mu \text{ ist } \sigma\text{-additiv.}$$

Aufgabe 41 ***(9 Punkte)***

Sei μ ein äußeres Maß auf X und sei

$$\mathcal{M} \quad := \quad \{A \subseteq X \mid \mu(V) = \mu(V \cap A) + \mu(V \cap A^c) \text{ für alle } V \subseteq X\}\,.$$

Zeigen Sie, daß dann für alle $A, B \in \mathcal{M}$ und $V \subseteq X$ gilt:

1. $A \cup B \in \mathcal{M}$.
2. $\mu\big(V \cap (A \,\dot\cup\, B)\big) = \mu(V \cap A) + \mu(V \cap B)$.