Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 11

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 13. Januar 2011, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 42 *(7 Punkte)*

Sei μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, bezüglich dessen der Einheitswürfel endliches Maß hat.

1. Zeigen Sie, daß ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert, so daß $\mu = c\mu_{\text{Lebesgue}}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt.
2. Bestimmen Sie c.

Aufgabe 43 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie:

1. Ein Dynkinsystem ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es durchschnittsstabil ist.
2. Das von einer durchschnittsstabilen Menge $\mathcal{E} \subseteq 2^X$ erzeugte Dynkinsystem ist die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

Aufgabe 44 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß es zu jeder nichtleeren abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine monotone Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, für die $f(\mathbb{R}) = A$ gilt.

Aufgabe 45 *(6 Punkte)*

Zeigen Sie, daß für $f \in \mathcal{M}^+$

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist fast überall gleich } 0.$$

gilt.

Aufgabe 46 *(6 Punkte)*

Sei $f \in \mathcal{M}^+$ mit endlichem Integral. Zeigen Sie, daß für $\varepsilon > 0$ auch $\mu\big(\{f > \varepsilon\}\big)$ endlich ist.