Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 12

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 20. Januar 2011, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 47 *(7 Punkte)*

Beweisen Sie die Linearität des komplexen bzw. numerischen Maßintegrals, d. h., daß für alle integrierbaren $f, g : X \longrightarrow \widehat{\mathbb{K}}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar ist und daß gilt

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, \mathrm{d}\mu \quad = \quad \alpha \int_X f\, \mathrm{d}\mu + \beta \int_X g\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Aufgabe 48 *(4 Punkte)*

Gilt im Lemma von Fatou sogar die Gleichheit? (Beweis oder Gegenbeispiel?!)

Aufgabe 49 *(6 Punkte)*

Seien $f_n, f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ meßbar und f^- integrierbar. Zeigen Sie:

$$f_n \geq f \text{ fast überall} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, \mathrm{d}\mu \quad \leq \quad \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Reicht es auch aus, die Integrierbarkeit von f^+ zu fordern?

Aufgabe 50 *(6 Punkte)*

Sei $f \in \mathcal{M}^+$ mit $\int_X f = c \in (0, \infty)$. Bestimmen Sie für alle $\alpha \in (0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \ln\Big[1 + \Big(\frac{f}{n}\Big)^{\alpha}\Big]\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Aufgabe 51 *(6 Punkte)*

Sei (f_n) eine Folge fast überall auf X definierter integrierbarer Funktionen mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n|\, \mathrm{d}\mu \quad < \quad \infty\,.$$

Zeigen Sie, daß die Reihe

$$f(x) \quad := \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

für fast alle x konvergiert, die Grenzfunktion f integrierbar ist und daß gilt

$$\int_X f\, \mathrm{d}\mu \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n\, \mathrm{d}\mu\,.$$