Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 13

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 27. Januar 2011, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 52 ***(5 Punkte)***

Bleibt der Satz von der majorisierten Konvergenz richtig, wenn man die fast überall geforderte Majorantenbedingung $|f_n| \leq g$ durch

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \quad < \quad \infty$$

ersetzt? Wie sieht es aus, wenn man zusätzlich $\mu(X) < \infty$ fordert?

Aufgabe 53 ***(6 Punkte)***

Betrachten Sie $X = [0, 1]$ mit dem Lebesguemaß.
Zeigen Sie, daß es beschränkte Folgen $(f_n) \subseteq L_p$ gibt, die keine fast überall konvergenten Teilfolgen besitzen.

Hinweis: Versuchen Sie mal $f_n(x) := e^{2\pi i n x}$.

Aufgabe 54 ***(5 Punkte)***

Zeigen Sie, daß die Treppenfunktionen (für beliebige Maßräume $(X, \mathfrak{A}, \mu)$) dicht in L_p liegen.

Aufgabe 55 ***(7 Punkte)***

Zeigen Sie für $X = [0, 1]$ und das Lebesguemaß μ:
1. Für $f \in L_\infty$ gilt $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$, falls $p \to \infty$.
2. Es gilt $L_\infty \subset \bigcup_{1 \leq p < \infty} L_p$ (echte Teilmenge!).

Welche der Aussagen gelten auch noch für $X = \mathbb{R}$?

Aufgabe 56 ***(6 Punkte)***

Sei $\mathfrak{A}_n$ die durch Vervollständigung des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}^n$ gebildete σ-Algebra.
Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A}_n \otimes \mathfrak{A}_m$ für $n, m \in \mathbb{N}_+$ echt in $\mathfrak{A}_{n+m}$ enthalten ist.

Hinweis: Betrachten Sie Schnitte von $M \in \mathfrak{A}_n \otimes \mathfrak{A}_m$.