Michael Winkler
Johannes Lankeit

15.10.2019
Abgabe der Hausübungen: 22.10.2019

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 1.1.
Es sei $c \in \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem

$$u'(t) = u(t), \qquad u(0) = c$$

hat genau eine Lösung.
Beweise diese Aussage

a) mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung „Reelle Analysis“ (oder „Angewandte Analysis“)
b) ausschließlich mit Argumenten aus der Analysis I.

Aufgabe 1.2.
Finde Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme.

$$a)\ u'u = 1, \quad u(0) = 1 \qquad b)\ u'(t) = u(t) + t, \quad u(0) = 1 \qquad c)\ u' = u^2 + 3u + 2, \quad u(0) = 1$$

Aufgabe 1.3.
a) Zeige: $f \in C^1(\mathbb{R})$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn die Ableitung beschränkt ist.
b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ Lipschitz-stetig?
c) Hat das Anfangswertproblem $u' = u^2,\ u(0) = 42$ eine eindeutige Lösung?

Aufgabe 1.4.
Gegeben seien $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachte die auf $[0, \infty)$ durch

$$F(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\ \mathrm{d}s$$

gegebene Funktion.
Untersuche sie auf Differenzierbarkeit und bestimme ihre Ableitung.
Welches Anfangswertproblem löst F im Fall $f = \exp$?

Aufgabe 1.5.
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) Eine stetig differenzierbare auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion f ist genau dann monoton steigend, wenn f' nichtnegativ ist.

b) Eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann streng monoton steigend, wenn f' überall positiv ist.

c) Ist $f \in C^1([0,\infty))$ und $f' \geq g$ mit einer nichtnegativen, messbaren Funktion $g \notin L^1((0,\infty))$, so ist f unbeschränkt.

Finde zu den falschen Aussagen (falls vorhanden) eine möglichst ähnliche zutreffende Aussage und beweise diese.

Aufgabe 1.6.
Von der Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass sie

$$u' = \sqrt[3]{|u|}, \qquad u(0) = 0$$

löse. Muss/kann sie monoton/streng monoton sein?

Aufgabe 1.7.
Finde alle Anfangswerte $u_0 \in \mathbb{R}$, für die die Lösung von

$$u'(t) = \sin(u(t))e^{\cos(u(t))}, \quad t > 0, \qquad\qquad u(0) = u_0$$

konstant ist.

Aufgabe 1.8.
Stelle fest, ob die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme global existieren oder nach endlicher Zeit explodieren. Dabei sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $u' = u^2 + 3u + 2, \quad u(0) = 1$

b) $u'(t) = u^2(t) + t, \quad u(0) = 1$

c) $u' = u \cdot (\ln(1+u))^\alpha \quad u(0) = u_0 > 0$

Zum „Nachweis qualifizierter Teilnahme“ (vgl. §6 (4) der Prüfungsordnungen B.Sc. Mathematik oder Technomathematik oder §15 (3) der PO B.Sc. Physik) ist es erforderlich,

- die Hausaufgaben zu allen Übungsblättern abzugeben (zwei unentschuldigte Ausnahmen sind dabei erlaubt) und
- dabei in den Hausaufgaben insgesamt mindestens zwanzig Punkte zu erreichen.

Der Nachweis qualifizierter Teilnahme ist (entsprechend §6 (1) der PO B.Sc. Mathematik bzw. Technomathematik bzw. der entsprechenden Modulbeschreibung im Anhang der PO B.Sc. Physik) Voraussetzung für die Teilnahme an der Modulabschlussprüfung (Klausur).

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt zu Beginn der Übung (notfalls auch vorher: roter Kasten 108, D1-Flur). Es wird voraussichtlich nicht jede einzelne Aufgabe im Detail korrigiert werden.

Soweit nicht in der Übung anders besprochen, sind *alle* Aufgaben eines Blattes als Hausaufgaben zu betrachten.