Michael Winkler
Johannes Lankeit

7.1.2020
Abgabe der Hausübungen: 14.1.2020

10. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis" im WS 2019/20

Aufgabe 10.1.
Zeige: Jede Lösung der Wärmeleitungsgleichung (W1) aus 2.2 zu nichtnegativen Anfangsdaten bleibt nichtnegativ.

Aufgabe 10.2.
Zeige:

$$u_t = u_{xx} + \sqrt{1+u}, \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \sin x,\ x \in (0,\pi) \tag{1}$$

hat eine glatte klassische Lösung in $(0,\pi) \times (0, T_{max})$ für ein $T_{max} > 0$.
Was geschieht für $t \nearrow T_{max}$?
Zeige, dass $u(\frac{\pi}{4}, t_0) = u(\frac{3\pi}{4}, t_0)$, wobei $t_0 = \min\left\{42, \frac{1}{2}T_{max}\right\}$.
Zeige außerdem, dass u nichtnegativ ist.
Ist T_{max} endlich?
Gibt es weitere Lösungen von (1)?

Aufgabe 10.3.
Es sei Ω ein glattes, beschränktes Gebiet und u_0 glatt und positiv in Ω (und 0 auf $\partial\Omega$). Zeige, dass klassische Lösungen von

$$u_t = \Delta u + 1 \quad \text{in } \Omega \times [0,\infty), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega$$

nicht gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 10.4.
Es seien $u, \widetilde{u} \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T])$ mit

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), && (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
\widetilde{u}_t(x,t) - \Delta \widetilde{u}(x,t) &= f(x,t), && (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
u(x,t) = 0 &= \widetilde{u}(x,t), && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\\
u(x,0) &= \widetilde{u}(x,0), && x \in \Omega
\end{aligned}$$

für eine gegebene Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$ und ein glatt berandetes beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie ein $T > 0$. Zeige durch Betrachtung von $\int_\Omega (u - \widetilde{u})^2$, dass $u = \widetilde{u}$.

Aufgabe 10.5.
Gegeben sei $0 \le u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$. Bestimme die maximale Existenzzeit der Lösung von

$$\begin{aligned}
u_t &= \Delta u + \pi + \cos(|x|) + \arctan(u) - \ln(1+u) + \frac{42}{1+t} && \text{in } \Omega \times (0, T_{max}),\\
u\big|_{\partial\Omega} &= 0, \quad t \in (0, T_{max}), \qquad u(\cdot,0) = u_0 && \text{in } \Omega.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.6.
Es sei Ω ein glattes, beschränktes Gebiet und u_0 eine glatte Funktion $\Omega \to \mathbb{R}$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$. (Beachte: Im Unterschied zu Aufgabe 10.3 ist keine Vorzeicheninformation gegeben.) Zeige, dass klassische Lösungen von

$$u_t = \Delta u + 1 \quad \text{in } \Omega \times [0,\infty), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega$$

nicht gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 10.7.
Es gebe $\alpha, c_1, c_2 > 0$, sodass $c_1 t^\alpha \leq f(x,t,u) \leq c_2 t^\alpha$ für alle $x \in \Omega, t \geq 0, u \geq 0$.
Finde solche[1] $0 \leq \beta \leq \gamma$, dass zu positivem $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ (mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$) die Lösung u von

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t,u(x,t)), \quad u(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0, T_{max})$$

mit geeigneten $d_1, d_2 > 0$ die Ungleichungen $d_1 t^\beta \varphi(x) \leq u(x,t) \leq d_2(t^\gamma + 1)$ für alle $x \in \Omega$, $t > 0$ und eine positive Funktion φ erfüllt.

Aufgabe 10.8.
Finde eine Lösung für

$$u_t = u_{xx}, \qquad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

in der Form

$$u(x,t) = f(x+ct)$$

für zu bestimmendes $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.9.
Es sei $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ und $k = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4}}\,\mathrm{d}z} > 0$. Betrachte

$$u(x,t) = \frac{k}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

a) Zeige: Dies definiert eine Funktion $u\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$.
b) Zeige: u ist stetig. u lässt sich einmal partiell nach t und zweimal nach x ableiten und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung: $u_t = \Delta u$ in $\Omega \times (0,\infty)$ mit $\Omega = \mathbb{R}$.
c) Zeige: Es ist
$$\frac{k}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y = 1$$
und für $\delta > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist
$$\lim_{t \searrow 0} \frac{k}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}\setminus B_\delta(x)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y = 0.$$
Tipp: Substitution. (vgl. Def k)
d) Für stetiges u_0 gilt $u(x,t) \to u_0(x)$ für $t \searrow 0$ und $x \in \mathbb{R}$.
Tipp: Zeige, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $t_\varepsilon > 0$ existiert, sodass für $0 < t < t_\varepsilon$
$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{k}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (u_0(y) - u_0(x))\,\mathrm{d}y \right| \leq \varepsilon,$$
indem du den Integrationsbereich geeignet aufteilst. (Teil c könnte sich als hilfreich erweisen.)
e) Nimm an, dass die Anfangsbedingung durch $u_0(x) = e^{-|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Zu welchem der in Definition 2.1.1 genannten Funktionenräume gehört u in diesem Fall, welche(r) der dort eingeführten Lösungsbegriffe trifft auf u zu?
f) Angenommen, der Träger von $u_0 \geq 0$ ist enthalten in $[-1,1]$. Weiter sei $R > 0$. Wie schnell „hat sich die Wärme bis R ausgebreitet“, wie groß ist also $\inf\{t > 0 : u(R,t) > 0\}$?

[1] möglichst nah beieinander liegende