Michael Winkler
Johannes Lankeit

14.1.2020
Abgabe der Hausübungen: 21.1.2020

11. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 11.1.
Gegeben sei eine klassische Lösung von

$$u_t = \Delta u + |x|e^{-t}, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0.$$

Zeige, dass sie global ist, und bestimme ihr Langzeitverhalten.

Aufgabe 11.2.
Zeige: Das Anfangswertproblem

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, t > 0, \qquad\qquad u(x,0) = 1, \quad x \in B_1(0),$$

hat mindestens zwei verschiedene Lösungen. (Warum widerspricht das nicht Korollar II.2.1.4?)

Aufgabe 11.3.
Zeige, dass Lösungen von

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + |x|^2, \quad x \in B_1(0),\, t > 0, \qquad u\big|_{\partial B_1(0)} = 0, \quad t > 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0$$

global existieren, und untersuche ihr Langzeitverhalten.

Aufgabe 11.4.
Für $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ definieren wir eine Funktion $e^{t\Delta}u_0$ durch

$$\left[e^{t\Delta}u_0\right](x) := u(x,t),$$

worin u die Lösung von

$$u_t = \Delta u, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0$$

bezeichne.
0) Woher könnte die Notation stammen?
1) Zeige, dass für $s, t \geq 0$ stets $e^{(t+s)\Delta}u_0 = e^{t\Delta}(e^{s\Delta}u_0)$ ist und dass $e^{0\Delta}u_0 = u_0$.
2) [Nimm für die Rechnungen dieser Teilaufgabe an, dass alle auftretenden Funktionen so gutartig sind, dass die Reihenfolge der Ableitungen und Integrale stets vertauscht werden kann.]
Welches Anfangsrandwertproblem löst dann

$$w(x,t) = (e^{t\Delta}u_0)(x) + \int_0^t \left[e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s)\right](x) ds$$

(für $f\colon \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$)?

Aufgabe 11.5.
Zu gegebenem (glatt berandetem, beschränktem) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne λ_1 die kleinste positive Zahl, sodass

$$-\Delta w = \lambda_1 w \text{ in } \Omega, \qquad w\big|_{\partial\Omega} = 0$$

eine nichttriviale Lösung hat.
(Für glatt berandete beschränkte Gebiete existiert eine solche Zahl $\lambda_1 > 0$ sowie eine zugehörige Lösung w, die in Ω positiv ist. Außerdem gilt: Ist für eine abzählbare Familie glatt berandeter, beschränkter Gebiete $\Omega_{k+1} \supset \Omega_k$ und $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$, so ist $\lambda_1(\Omega) = \lim_{k\to\infty} \lambda_1(\Omega_k)$.)
a) Bestimme λ_1 für $\Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \subset \mathbb{R}$.
b) Zeige: Wenn Ω_2 dieselbe Form hat wie Ω_1, aber größer ist (d.h. $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \mu x \in \Omega_1\}$ für ein $\mu \in (0,1)$), so ist $\lambda_1(\Omega_2) < \lambda_1(\Omega_1)$ [genauer: $\lambda_1(\Omega_2) = \mu^2 \lambda_1(\Omega_1)$].
c) Es sei $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ positiv in Ω und $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$. Zeige, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ gibt, sodass die Lösung u von

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \qquad u(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, u(\cdot,0) = u_0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

für alle $t > 0$ die Ungleichung $\|u(\cdot,t)\|_\infty \geq C_\varepsilon e^{-(\lambda_1+\varepsilon)t}$ erfüllt.
Hinweis: Betrachte eine Vergleichsfunktion $\underline{u}(x,t) = y(t)\varphi(x)$ in einem Teilgebiet $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$.
d) Zeige, dass im Falle $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert, sodass jede glatte klassische Lösung u von

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \qquad u(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, u(\cdot,0) = u_0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

für alle $t > 0$ die Ungleichung $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leq C_\varepsilon e^{-(\lambda_1-\varepsilon)t}$ erfüllt.
(Falls es dir beim Beweis hilft, nimm hierfür zusätzlich an, dass Ω sternförmig ist.)
Inwiefern unterscheidet sich diese Aussage von der aus Prop. II.2.2.1?

Aufgabe 11.6.
Die Funktion v sei glatte klassische Lösung von

$$v_t = \Delta v + v \quad \text{in } \Omega \times (0, T_{max}), \qquad v\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T_{max}), \qquad v(\cdot,0) = v_0 \quad \text{in } \Omega$$

mit $v_0 \in C^1(\overline{\Omega})$.
a) Zeige, dass v globale Lösung (also auf $(0,\infty)$ definiert) ist.
b) Zeige, dass in „hinreichend kleinen“ Gebieten $\|v(\cdot,t)\|_\infty \to 0$ für $t \to \infty$. Präzisiere dabei, was „hinreichend klein“ bedeutet.
c) Was geschieht in „großen“ Gebieten?

Tipp: Welche Gleichung löst $u = ve^{-t}$?

Aufgabe 11.7.
Es sei $\Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ mit einem $L \in (0,\pi)$ und u sei klassische Lösung von

$$u_t = \Delta u + u - u^2, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \geq 0.$$

Zeige, dass u global existiert und gegen 0 konvergiert.
Gilt dieselbe Aussage zu globaler Existenz und Langzeitverhalten auch für $L = 42\pi$?