Michael Winkler
Johannes Lankeit

21.1.2020
Abgabe der Hausübungen: 28.1.2020

12. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 12.1.
Bestimme $\omega(u)$ für eine glatte klassische Lösung u von

$$u_t = \Delta u + |x|, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0 \in C(\overline{\Omega})$$

in $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Aufgabe 12.2.
Seien $n \geq 1$, $R > 0$, $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $C > 0$ sowie $q > n$. Zeige, dass jede Folge aus der Menge

$$\left\{u \in C^1(\overline{\Omega}); u \text{ ist radial }, u\big|_{\partial\Omega} = 0, \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} < C\right\}$$

eine in $C^0(\overline{\Omega})$ konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 12.3.
Nutze die „Wärmeleitungshalbgruppe“ $e^{t\Delta}$, um die Abbildungsvorschrift einer Abbildung anzugeben, die eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) \\ v_t &= \Delta v - v + u \\ u\big|_{\partial\Omega} &= v\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(\cdot,0) &= u_0, \quad v(\cdot,0) = v_0 \end{aligned}$$

als Fixpunkt hat.

Aufgabe 12.4.
Beweise Behauptung 6 aus dem Beweis von Lemma 2.3.7 für $n = 2$.

Aufgabe 12.5.
Es sei w eine nichttriviale Lösung von $-\Delta w = \lambda_1 w$, $w\big|_{\partial\Omega} = 0$ in Ω und $f(x,t) = w(x)\sin(\alpha t)$ mit einem $\alpha > 0$.
a) Zeige, dass es Anfangsfunktionen $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ gibt, sodass

$$u_t = \Delta u + f, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

periodisch ist, dass es also $T > 0$ gibt mit $u(x,t) = u(x,t+T)$ für alle $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,\infty)$.
b) Zeige, dass sich die Lösung u für jede beliebige Anfangsfunktion an eine periodische Funktion annähert. (Präzisiere dabei diese Aussage.)
c) Konvergiert (in der Situation aus b)) $u(\cdot,t)$ für $t \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion? Falls „ja“: Welche? Falls „vielleicht“: Unter welchen Bedingungen an die Anfangswerte?
d) Sei $g(x,t) = f(x,t) + \varepsilon(x,t)$ mit einer Funktion ε, die $\lim_{t\to\infty} \|\varepsilon(\cdot,t)\|_\infty = 0$ erfüllt. Welche zu a) oder b) ähnlichen Aussagen lassen sich für die Lösung von

$$u_t = \Delta u + g, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0$$

erhalten?
e) Beschreibe $\omega(u)$ für Lösungen u der Wärmeleitungsgleichung mit periodischem Quellterm (wie in a)).

Aufgabe 12.6.
Betrachte das Anfangsrandwertproblem

$$u_t = \Delta u + f(x,t,u), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot,0) = u_0,$$

wobei $f \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,\infty) \times J)$ für ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ sowie $u_0 \in C^1(\overline{\Omega}; J)$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ seien und f

$$\sup_{v\in J} \|f(\cdot,t,v) - g(\cdot)\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty$$

für ein $g \in C^0(\overline{\Omega})$ erfülle, für das

$$0 = \Delta w + g(x), \qquad w\big|_{\partial\Omega} = 0$$

lösbar sei (mit Lösung w).
Zeige, dass dann

$$\|u(\cdot,t) - w\|_\infty \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty.$$