Michael Winkler
Johannes Lankeit

28.1.2020
Abgabe der Hausübungen: Tag des hl. Nimmerlein

13. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 13.1.
Es sei $\Omega = (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \subset \mathbb{R}$. Betrachte

$$\begin{aligned} u_t =& \Delta u + u - u^2 \\ u\big|_{\partial\Omega} =& 0 \\ u(\cdot, 0) =& u_0 \end{aligned}$$

für radiales $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $0 < u_0$ in Ω, $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$.
Zeige[1], dass eine globale glatte klassische Lösung u existiert, und bestimme $\omega(u)$.

Aufgabe 13.2.
Finde alle klassischen Lösungen $u \in C^2(\overline{\Omega})$ von

$$\Delta u = \sqrt{1+u} - 1 \qquad \text{in } \Omega, \qquad\qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Triff dann Aussagen über das Langzeitverhalten von Lösungen des Anfangsrandwertproblems

$$u_t = \Delta u - \sqrt{1+u} + 1 \quad \text{in } \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0$$

für gegebenes $u_0 \in C(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 13.3.
Untersuche in $\Omega = B_R \subset \mathbb{R}^n$ die Lösungen des Anfangsrandwertproblems

$$u_t = \Delta u + 42 - u^4, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \geq 0,$$

worin $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$. Was lässt sich über ihr Langzeitverhalten aussagen?

Aufgabe 13.4.
Es seien $w, \widetilde{w} \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösungen von

$$-\Delta u = \sqrt{u}, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

für die es Konstanten $c_0, c_1, c_2, c_3 > 0$ gebe mit

$$c_0 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq w(x) \leq c_1 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \qquad c_2 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \widetilde{w}(x) \leq c_3 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega).$$

Setze $\mu_1 := \sup\{0 < \mu \leq 1; \mu w \leq \widetilde{w}\}$.
Warum ist μ_1 wohldefiniert?
Zeige, dass im Fall $\mu_1 < 1$ damit $\Delta(\mu_1 w - \widetilde{w}) > 0$ in Ω gölte und damit $\widetilde{w} > \mu_1 w$.
Wie lässt sich diese Beobachtung zu der Feststellung $w = \widetilde{w}$ ausbauen?

Aufgabe 13.5.
Betrachte nochmal die Inhalte der Vorlesung sowie die Übungsblätter und stelle ggf. Fragen dazu.

Die Klausur findet am 12.02.2020, ab 9.00 Uhr, in L2 201 statt.

[1] gerne auch durch Rückgriff auf frühere Übungsergebnisse