Michael Winkler
Johannes Lankeit

22.10.2019
Abgabe der Hausübungen: 29.10.2019

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 2.1.
Es seien $a, b \in C^1(\mathbb{R})$ und $C \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, \infty)$. Betrachte die durch

$$g(t) = e^{\int_0^t a(s)\ \mathrm{d}s} \left[\int_0^t b(s) e^{-\int_0^s a(\sigma)\ \mathrm{d}\sigma}\ \mathrm{d}s + C \right], \qquad t > 0$$

definierte Funktion und zeige:[1]

a) Falls $a \geq \alpha$, $b \geq 0$, $C > 0$, so ist $\lim_{t \to \infty} g(t) = \infty$.
b) Falls $a \leq -\alpha$ und b beschränkt ist, so ist auch g beschränkt.

Aufgabe 2.2.
Löse die folgenden AWPe:

$$\begin{array}{llll} a)\ u'(t) = \sqrt{1 + u(t)}, & u(0) = 1, & b)\ u'(t) = -t^2 + e^t u(t), & u(0) = 0, \\ c)\ u'(t) = t u(t) + \dfrac{1}{1+t}, & u(0) = 1, & d)\ u'(t) = u(t)(1 + t^2), & u(0) = 2. \end{array}$$

Aufgabe 2.3.
Bestimme $\lim_{t \to \infty} u(t)$ für die Lösung u von

$$\begin{array}{ll} a)\ u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} u(t) + \dfrac{1}{1+t^2}, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, & b)\ u'(t) = e^{-t^2} u(t) + \dfrac{1}{1+t}, \quad u(0) = u_0 = 1, \\ c)\ u'(t) = (12 \sin(2t^{13}) - 23) u(t) + e^{-t^3} \cos(t) t, \qquad u(0) = 42. & \end{array}$$

Aufgabe 2.4.
Gegeben sei eine Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) = a(t)u(t) + b(t), t > 0$ (mit bekannten stetigen Funktionen a, b, und α sei positiv).

a) Falls $a, b \in L^1((0, \infty))$, ist u beschränkt.
b) Falls $a \leq -\alpha$ und $b \in L^1((0, \infty))$, so ist $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$.

Aufgabe 2.5.
Betrachte für $u_0 \in \mathbb{R}$ das AWP

$$u'(t) = -2(t-1)(u(t))^2, \qquad u(0) = u_0.$$

Zeige, dass es eindeutig lösbar ist, bestimme die Lösung und das maximale Existenzintervall $(T_{min}(u_0), T_{max}(u_0))$. Ist die Abbildung $\mathbb{R} \ni u_0 \mapsto T_{max}(u_0)$ stetig?

Aufgabe 2.6.
Betrachte die Lösung u von $\quad u'(t) = -u(t) + \sqrt{t}, \quad u(0) = u_0 > 0, \quad$ und zeige: $\lim_{t \to \infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}} = 1$.

[1] Vorsicht: Der Beweis kann (und darf sehr gerne) ziemlich kurz ausfallen.

Aufgabe 2.7.
Löse die folgenden AWPe:

a) $u'(t) = 8u(t) + t^2 e^t, u(0) = 7,$ b) $(\ln \circ u)'(t) = 2 + \dfrac{t}{u}, \quad u(0) = 1,$

c) $u'(t) = \sin(t)u(t) + \cos(t), \quad u(0) = 7,$ d) $u'(t) = (1 + u^2(t))a(t)\arctan(u(t)) + u^2(t)b(t) + b(t), \quad u(0) = 0,$

wobei in d) a, b gegebene stetige Funktionen seien.

Aufgabe 2.8.
Gegeben sei eine Lösung u der Differentialgleichung $u'(t) = a(t)u(t)+b(t)$, $t > 0$, mit $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$ sowie bekannten stetigen Funktionen a, b, wobei eine Zahl $\alpha \in (-\infty, 0)$ existiere, derart, dass $a \leq \alpha$. Zeige:
Falls es ein $C > 0$ gibt, mit dem für alle $t > 0$ die Ungleichung $\int_t^{t+1} |b(s)| \, \mathrm{d}s \leq C$ gilt, so ist u beschränkt.

Aufgabe 2.9.
Gegeben seien eine positive Funktion $f \in C^1((0, \infty))$ mit $\int_1^\infty \frac{1}{f(s)} ds < \infty$ und $u_0 > 0$. Zeige: Die Lösung u von

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0$$

explodiert in endlicher Zeit gegen ∞.
Betrachte nochmals Aufgabe 1.8.[2] Auf welche Teilaufgabe(n) ist dieses Kriterium anwendbar?

Aufgabe 2.10.
In dieser Aufgabe betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y''(t) + \frac{a}{t} y'(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t > t_0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = z_0. \qquad (AWP)$$

Dabei ist $a \geq 0$, $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine auf der Menge $I \times U$ (für $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $I = [0, \sup I)$, $\sup I \in (0, \infty]$) definierte, stetige Funktion, die in der zweiten und dritten Komponente lokal Lipschitz-stetig ist (mit vom ersten Argument unabhängiger Lipschitz-Konstanten), $(t_0, y_0, z_0) \in I \times U$ mit $t_0 \geq 0$ und, falls $t_0 = 0$, auch $z_0 = 0$.

a) Formuliere obiges AWP als Integralgleichung (IG).[3]
b) Zeige, dass jede in einem Intervall $(0, T)$ stetig differenzierbare Lösung von (IG) in $(0, T)$ sogar zweimal stetig differenzierbar ist und (IG) und (AWP) äquivalent sind.
c) Zeige mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass (IG) lokal eine eindeutige Lösung in C^1 hat. Genauer: Zeige: Ist $(0, y_0, z_0) = (0, y_0, 0) \in I \times U$, so existieren $T > 0$ und genau eine Funktion $y \in C^1([0, T])$, die (IG) löst.
Liegt (t_0, y_0, z_0) im Innern von $I \times U$ (mit insbesondere $t_0 > 0$), so existieren ein $T > 0$ und genau eine Funktion $y \in C^1([t_0 - T, t_0 + T])$ (bzw. in $y \in C^1([t_0 - T, t_0])$), die (IG) löst.
d) Zeige: Ist y eine Lösung von (IG) auf dem Intervall (τ, T) mit $\tau, T > 0$, für die $y_1 = \lim_{t \nearrow T} y(t)$ und $z_1 = \lim_{t \nearrow T} y'(t)$ existieren und $(T, y_1, z_1) \in I \times U$ erfüllen, so gibt es auch eine Lösung von (IG) auf einem Intervall (τ, T_1) für ein $T_1 > T$, die auf (τ, T) mit y übereinstimmt.
e) Zeige: Zu dem Anfangswertproblem

$$y''(t) + \frac{a}{t} y'(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t > 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$$

gibt es $T_{max} \in (0, \infty]$ und eine Funktion $y \in C^1([0, T_{max}))$ sowie eine Folge $(t_k)_k$, mit $t_k \nearrow T_{max}$ und entweder $\|y(t_k)\|_\infty + \|y'(t_k)\|_\infty \to \infty$ oder $(y(t_k), y'(t_k)) \to x$ mit einem $x \in \partial U$ für $k \to \infty$ – oder aber $T_{max} = \sup I$.

[2] A 1.8: Stelle fest, ob die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme global existieren oder nach endlicher Zeit explodieren. Dabei sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) $u' = u^2 + 3u + 2, \quad u(0) = 1$ b) $u'(t) = u^2(t) + t, \quad u(0) = 1$ c) $u' = u \cdot (\ln(1 + u))^\alpha \quad u(0) = u_0 > 0$

[3] Als hilfreich könnte sich die Beobachtung erweisen, dass $y''(t) + \frac{a}{t} y'(t) = (g \cdot (hy')')(t)$ für geeignete Funktionen g, h ist.