Michael Winkler
Johannes Lankeit

5.11.2019
Abgabe der Hausübungen: 12.11.2019

4. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 4.1.
a) Bestimme $\lim_{t \nearrow T_{max}} u(t)$ für die Lösung u von

$$u' = (u^2 + 1)(u - 2)(u - 3)(u - 4)(u^2 - 11u + 30),\ t > 0, \qquad u(0) = u_0,$$

in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$.
b) Zeige, dass es $t_0 > 0$ gibt, sodass die Lösung u von

$$u' = 1 + u - u^\pi,\ t > 0, \qquad u(0) = 12,$$

(global ist und) für alle $t > t_0$ die Eigenschaft $u(t) \leq 2$ hat.

Aufgabe 4.2.
Bestimme $\lim_{t \nearrow T_{max}} u(t)$ für die Lösung u von

$$u' = e^{-u} - u,\ t > 0, \qquad u(0) = u_0, \qquad \text{bzw. von} \qquad u' = u^2 + 3u + 2,\ t > 0, \qquad u(0) = u_0,$$

in Abhängigkeit von $u_0 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.3.
Betrachte

$$u'(t) = e^t u^2(t) - 1, \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0 \in \mathbb{R},$$

und untersuche Lösungen hinsichtlich globaler Existenz und (sofern möglich) ihres Langzeitverhaltens.

Aufgabe 4.4.
Sei $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig mit $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Zeige, dass dann nicht unbedingt $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ gelten muss, aber zumindest eine Folge $t_j \to \infty$ mit $f(t_j) \to 0$ für $j \to \infty$ existiert.

Aufgabe 4.5.
Es seien a, b und r sowie $u_0 = u(0)$, $v_0 = v(0)$ positiv und es gelte $b > a$. Die Funktionen $u, v\colon [0, T_{max}) \to \mathbb{R}$ mögen die maximale Lösung des einfachen Systems für zweigeschlechtliche Populationsdynamik bilden, das durch

$$\begin{aligned} u' &= r\frac{v}{u+v} \cdot u - au \\ v' &= r\frac{u}{u+v} \cdot v - bv \end{aligned}$$

gegeben ist. Zeige, indem du zunächst die Gleichungen einzeln betrachtest, dass sowohl u als auch v positiv sind und dass sie sich nach oben und nach unten jeweils gegen eine positive, stetige, auf ganz $[0, \infty)$ definierte Funktion abschätzen lassen.[1]
Beweise: Ist $r < b - a$, so gilt $\frac{u(t)}{v(t)} \to \infty$ für $t \to \infty$.
Ist $r > b - a$, so folgt $\frac{u(t)}{v(t)} \to \frac{r+(b-a)}{r-(b-a)} > 0$ für $t \to \infty$.
Hinweis: Leite dafür zunächst eine Differentialgleichung für die skalare Größe $z = \frac{u}{v}$ her.[2]

Aufgabe 4.6.
Untersuche zu gegebenem $u_0 \in (0, 42)$ das Langzeitverhalten der Lösung von

$$u' = u^3 - u^5 + \frac{u^2}{1+t}, \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0.$$

Aufgabe 4.7.
Betrachte zu gegebenen positiven Konstanten m, K und r die Differentialgleichung[3]

$$mx''(t) = K - r(x'(t))^2, \qquad t > 0.$$

Bestimme den Grenzwert von $v := x'$ für $t \to \infty$, falls $v(0) = 0$.

Aufgabe 4.8.
Von einer glatten Funktion $u\colon \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und beschränkt) sei bekannt, dass mit einem $t_0 > 0$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\cdot, t) \le \int_\Omega u(\cdot, t) - \int_\Omega u^2(\cdot, t), \qquad t > t_0$$

gilt. Gib eine obere Schranke für $\int_\Omega u(\cdot, t)$, $t \in (t_0 + 1, \infty)$, an.

Aufgabe 4.9.
Betrachte

$$u'(t) = u^2(t) - \sin t, \quad t > 0, \qquad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}.$$

Untersuche die Lösungen (in Abhängigkeit von u_0) auf globale Existenz.

[1] Damit kann man $T_{max} = \infty$ folgern und die Frage nach $\lim_{t\to\infty}$ im nächsten Aufgabenteil wird sinnvoll.
[2] Sie wird ungefähr die Form $z' = z(\ldots - r\frac{\cdot - \cdot}{\cdot + \cdot})$ haben.
[3] Hierin könnten m für die Masse eines Lkw, K für die Antriebskraft des Motors und r für einen Proportionalitätsfaktor im Zusammenhang mit dem Luftwiderstand stehen.