Michael Winkler
Johannes Lankeit

12.11.2019
Abgabe der Hausübungen: 19.11.2019

5. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis" im WS 2019/20

Aufgabe 5.1.
Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $u\colon \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, mit $\Omega = (0,1)^2$, von der bekannt sei, dass

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(x,t)\ \mathrm{d}x + \int_\Omega u^2(x,t)\ \mathrm{d}x \le \int_\Omega u(x,t)|\nabla u(x,t)|\ \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\ \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } t > 0.$$

Zeige, dass $t \mapsto \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ beschränkt ist.

Aufgabe 5.2.
Löse

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.3.
Was müssen wir im Satz 1.1.1 von Picard-Lindelöf ändern, damit er auf Systeme wie in 2.1 anwendbar ist?

Aufgabe 5.4.
Zeige, dass für die in 2.1.4 eingeführte Matrixnorm sowie für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt, dass

$$\|A \cdot B\| \le \|A\|\|B\|.$$

Aufgabe 5.5.
Löse $u' + Au = f(t), u(0) = u_0$, für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ sowie für $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$, $u_0 \in \mathbb{R}^3$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2 \\ e^{3t} - 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.6.
Bestimme die Lösung von

$$\begin{aligned} u' &= 21u + \frac{1}{2}v, \\ v' &= \frac{1}{2}w + 21v, \\ w' &= 21w, \\ u(0) = u_0, \quad v(0) &= v_0 \quad w(0) = w_0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.7.
Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $u\colon \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, mit $\Omega = (0,1)^2$, von der bekannt sei, dass

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(x,t)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\ \mathrm{d}x \le \int_\Omega u(x,t)|\nabla u(x,t)|^2\ \mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^4\ \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } t > 0.$$

Zeige, dass $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Aufgabe 5.8.
Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gelte
$$\mathrm{Re}\lambda > 0 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)$$
und es sei $u_0 \in \mathbb{C}^n$.
Ferner sei $f \in C^0([0,\infty);\mathbb{C}^n)$ so, dass
$$\text{a)} \int_0^\infty \|f(t)\| dt < \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \text{b)} \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$
Zeige, dass jeweils die Lösung u von
$$\begin{aligned} u' + Au =& f \\ u(0) =& u_0 \end{aligned}$$
global existiert und die Eigenschaft
$$u(t) \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty$$
hat.
In anderen Worten: Beweise Proposition 2.1.10. Verwende im Beweis insbesondere **nicht** Satz 2.1.11, der mittels dieser Aussage bewiesen wurde.

Aufgabe 5.9.
Betrachte das System
$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t/(1+e^t) \\ 1/\ln(t+2) \\ \sin(42t)\sqrt{t/(t^2+1)} \end{pmatrix}, \quad t > 0; \qquad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix},$$
und bestimme $\lim_{t\to\infty}(u(t), v(t), w(t))$.

Aufgabe 5.10.
Zeige, dass Lösungen u, v des Systems
$$\begin{aligned} u' =& 2u - v - uv, \qquad & u(0) = u_0, \\ v' =& uv + v - 2u, \qquad & v(0) = v_0, \end{aligned}$$
mit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in (0, T_{max})$ die Gleichung $u(t) + v(t) = u_0 + v_0$ erfüllen.