Michael Winkler
Johannes Lankeit

19.11.2019
Abgabe der Hausübungen: 3.12.2019

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 6.1.
Bestimme die stationären Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} u' &= u^2 + 2uv + v^2, \\ v' &= u^2 v - 3v + v^2. \end{aligned}$$

Gibt es auch Systeme mit unendlich vielen stationären Lösungen?

Aufgabe 6.2.
Bestimme $\lim_{t\to\infty} u(t)$ für die Lösung u von

$$u' + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 0 \\ \frac{1}{1+t^2} \\ \arctan(t) - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.3.
Bestimme die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$u' = u - uv, \qquad v' = u - v$$

und untersuche sie auf Stabilität.

Aufgabe 6.4.
Betrachte das klassische Lotka-Volterra-System

$$\begin{aligned} u' &= u(\alpha - \beta v), \\ v' &= -v(\gamma - \delta u) \end{aligned}$$

mit gegebenen Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, das die zeitliche Entwicklung einer Populationsgröße u von Raubtieren und der Beutetierpopulationsgröße v beschreiben soll.
Was können wir mit Satz 2.2.3 (bzw. Cor. 2.2.5) und Satz 2.2.8 über die Stabilität der Gleichgewichtslösungen aussagen?

Aufgabe 6.5.
Betrachte die Systeme

$$\begin{aligned} u' &= v, \\ v' &= -u, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u' &= v - u^3, \\ v' &= -u - v^3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u' &= v + u^3, \\ v' &= -u + v^3. \end{aligned}$$

(Was haben sie miteinander zu tun?)
In welchen Fällen ist das Gleichgewicht stabil, asymptotisch stabil, instabil?
Tipp: Betrachte den Abstand vom Ursprung (bzw. dessen Quadrats zeitliche Ableitung).

Aufgabe 6.6.
Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' &= u^2 v - u, \\ v' &= u^2 v + uv^2 - v. \end{aligned}$$

Bestimme alle Gleichgewichtspunkte und untersuche jeweils, ob sie stabil sind.

Aufgabe 6.7.
Es sei (für Lipschitz-stetiges $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $u_0 \in \mathbb{R}^n$) $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung des Systems $u' = f(u), u(0) = u_0$, mit $\lim_{t\to\infty} u(t) = u^* \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass dann $f(u^*) = 0$.

Aufgabe 6.8.
Finde die Gleichgewichtspunkte des Lorenz-Systems

$$\begin{aligned} x' =& -10x + 10y,\\ y' =& 28x - y - xz,\\ z' =& -\frac{8}{3}z + xy. \end{aligned}$$

Ist auch ein stabiles Gleichgewicht darunter?

Aufgabe 6.9.
Bestimme in Abhängigkeit vom Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ die maximale Existenzzeit T_{max} sowie den Grenzwert der Lösung (u, v) von

$$\begin{aligned} u' =& -42u + 2v^2,\\ v' =& -v^3e^{v^3} + v^2e^{v^3} - 5e^{v^3},\\ u(0) =& u_0, \quad v(0) = v_0, \end{aligned}$$

für $t \to T_{max}$.

Aufgabe 6.10.
Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' =& \alpha u - au^2 + Auv,\\ v' =& \beta v - bv^2 + Buv \end{aligned}$$

für positive Anfangswerte $u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0$.
Bestimme die Werte der Parameter $\alpha, a, A, \beta, b, B > 0$, für die nichtkonstante Lösungen (u, v) konvergent sein können.

Aufgabe 6.11.
Ein Differentialgleichungssystem heißt kooperativ, falls es von der Form

$$\begin{aligned} u_1' &= f_1(u_1, \dots, u_n, t),\\ &\dots,\\ u_n' &= f_n(u_1, \dots, u_n, t) \end{aligned} \tag{1}$$

mit einer Funktion f ist, für die $s_j \mapsto f_i(s_1, \dots, s_n)$ für alle $i = 1, \dots n$ und $j \neq i$ und für $k \neq j$ festgehaltene Argumente s_k, monoton wachsend ist.
Beweise den folgenden Vergleichssatz für kooperative Systeme[1]:
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ und $J_1, \dots, J_n \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f = (f_1, \dots, f_n)\colon J_1 \times \dots \times J_n \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz-stetig bzgl. $(u_1, \dots, u_n) \in J_1 \times \dots \times J_n$ und erfülle o.g. Kooperativitätsbedingung.
Sind dann $(\overline{u}_1, \dots \overline{u}_n)$ eine „Oberlösung“ und $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ eine „Unterlösung“ (1), sind also $(\overline{u}_1, \dots \overline{u}_n), (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)\colon [0, T] \to J_1 \times \dots \times J_n$ stetig differenzierbar mit

$$\overline{u}_i(t)' \geq f_i(\overline{u}_1(t), \dots \overline{u}_n(t), t), \qquad \underline{u}_i(t)' \leq f_i(\underline{u}_1(t), \dots, \underline{u}_n(t), t), \qquad \overline{u}_i(0) \geq \underline{u}_i(0)$$

für alle $t \in [0, T]$ sowie für alle $i = 1, \dots n$, so folgt

$$\overline{u}_i(t) \geq \underline{u}_i(t)$$

für alle $t \in [0, T]$ und $i \in \{1, \dots n\}$.

Betrachte nochmals Aufgabe 6.10 und zeige für die Fälle, in denen es keine konvergenten positiven Lösungen gibt, durch Vergleich mit $(\frac{c}{T_0-t}, \frac{d}{T_0-t})$ oder[2] $(ce^{\gamma t}, de^{\gamma t})$ (für geeignet gewählte Konstanten), dass die positiven Lösungen in endlicher Zeit explodieren bzw. unbeschränkt sind.

Gilt ein Vergleichssatz auch für allgemeine Systeme (ohne Kooperativitätsvoraussetzung)? Gib ein Gegenbeispiel an oder beschreibe skizzenhaft, wo und wie man deinen Beweis aus dieser Aufgabe anpassen müsste.

---

[1] Vielleicht kann der Beweis des Vergleichssatzes 1.2.2 einige Ideen liefern.
[2] für die Parameter, für die Ersteres nicht möglich ist