Michael Winkler
Johannes Lankeit

3.12.2019
Abgabe der Hausübungen: 10.12.2019

7. Übungsblatt zur Vorlesung „Angewandte Analysis“ im WS 2019/20

Aufgabe 7.1.
Zeige: Für die Gleichung

$$u' = \alpha u - au^2$$

(mit $\alpha, a \in \mathbb{R}$) definiert

$$\Phi(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{a}{3}x^3$$

eine Lyapunov-Funktion. Handelt es sich um eine strikte Lyapunov-Funktion?

Aufgabe 7.2.
Seien $a, b > 0$. Finde eine Lyapunov-Funktion für das System

$$u' = v - au^3, \qquad v' = -u - bv.$$

Aufgabe 7.3.
Seien $a, b > 0$. Finde $B > 0$ so, dass durch $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2$ eine strikte Lyapunov-Funktion für

$$u' = v, \qquad v' = -au - bv$$

auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird. (Und weise nach, dass es sich um eine strikte LF handelt.)

Aufgabe 7.4.
Zeige:

$$\Phi(x, y) = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y$$

definiert eine Lyapunov-Funktion für das Lotka-Volterra-System

$$u' = u(\alpha - \beta v), \qquad v' = -v(\gamma - \delta u)$$

auf $(0, \infty)^2$. Ist das Gleichgewicht in $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ asymptotisch stabil?

Aufgabe 7.5.
a) Zeige, dass für radiale Funktionen u

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}u_r\right)_r$$

ist.
b) Drücke für solche Funktionen auch $|\nabla u(x)|$ durch Ableitungen nach r aus.
c) Berechne (für $x \neq 0$) $\Delta |x|^{2-n}$ und $\Delta \log |x|$.

Aufgabe 7.6.
Gegeben seien $R > 0$, $R_0 \in (0, R)$ und $f\colon B_R \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R_0, \\ 0, & |x| \geq R_0. \end{cases}$$

Welche Funktion u liefert die Lösungsformel (1) aus 1.1.1?
Handelt es sich um eine klassische Lösung von (ED)?

Aufgabe 7.7.
Es sei $f \in L^1((0,1))$. Zeige:

$$x \mapsto \int_0^x f(s)ds, \qquad x \in [0,1],$$

definiert eine stetige Funktion.

Aufgabe 7.8.
Sei $R > 0$. Zeige: $f = (x \mapsto f(x)) \in L^1(B_R)$ gilt für radiale Funktionen f genau dann, wenn $(r \mapsto r^{n-1}f(r)) \in L^1((0,R))$.

Aufgabe 7.9.
Seien $n \geq 1$, $R > 0$, $f \in C^0(\overline{B_R})$ radial.
Finde eine Formel für radiale Lösungen u des Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in B_R, \\ u = 42, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Aufgabe 7.10.
Finde Lösungen zu

$$\begin{cases} -\Delta u = e^{|x|}, & x \in B_R, \\ u = 0, & x \in \partial B_R, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^2 - |x|, & x \in B_R, \\ u = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Aufgabe 7.11.
Seien $R > 0, n \geq 1$, $f \in C^0(\overline{B_R})$ radial und nichtnegativ. Zeige: Dann hat die Lösung u von (ED) ein (globales) Maximum in 0.